روشهای عددی در مکانیک خاک

بهروز گتمیری

دانشکده فنی

دانشگاه تهران

روش اجزای محدود

ایده اصلی:

ایـده اصـلی درروش اجـزای محـدود جـایگزینی یـک مسـاله پیچیـده بـا مسـاله ای آسـانتر مـی باشـد. درایـن آسـان سـازی معمـولا در نبـود روابـط و راه حلهـای صددرصـد کامـل(exact)بـه انتخـاب ویـافتن راه حـل تقریبـی بسـنده مـی شـود. در نبـود راه حـل دقیـق و کامـل بـا اسـتفاده از روش اجـزا محـدود بـا صـرف بیشـتر انـرژی محاسـباتی مـی تـوان راه حـل تقریبـی را هرچـه بیشـتر بـه راه حـل دقیـق نزدیک نمود.

در روش اجـزای محـدود، منطقـه ای کـه درآن راه حـل پیشـنهاد شـده اسـت بـه عناصـر محـدودی کـه در ارتبـاط بـا یکـدیگر هسـتند تقسـیم شـده اسـت.در هـر قطعـه یـا عنصـرروابط تقریبـی مناسـب راه حـل نوشـته شـده وشـرایط تعـادلی کلـی سـازه ازآن بدسـت مـی آیـد.اقنـاع شـرایط کلـی تعـادل نتیجـه ای کلی برای سیستم تقسیم شده به قطعات بدست می دهد.

گرچه نام روش اجزا محدود اخیرا به این متد داده شده است، لیکن ایده کلـی آن قـدیمی اسـت.روش شـبیه آنچه که امروز بکار برده می شود در ادبیات ریاضیات کاربردی در سـال 1943توسـط Courant پیشـنهاد شـده اسـت و روش اجـزای محـدود بـه شـکل امـروزی در سـال 1956توسـط Topp,Martin,Clough,Turner پیشنهاد شده است. اولین کاربرد روش اجزای محـدود جهـت آنـالیز سازه ی aircraft بوده است و امروزه در تمام شاخه های علوم از آن استفاده می شـود. بـا پیشـرفت ماشـین های محاسبه گر و رایانه ها، روش اجزا محدود نیز به گونه ای بسیار سریع پیشرفت حاصل کرده است.

می توان زمینه کاربردروش اجزا محـدود را در "**مسایل مقادیر حدّی**" بـه سـه بخـش عمـده زیـر تقسـیم بندی کرد.

1.مسایل تعادلی

2.مسایل مقادیر ویژه

3.مسایل مربوط به انتشار امواج

گروه اول مسایلی هستند که تابع زمان نبوده و بیانگر حالت پایا می باشند. این گونه مسایل میتوانند با نحوه ی برخورد خاص حل شوند، یعنی اینکه با در نظر گرفتن "تغییرشکل" یابادرنظرگرفتن "تنش" به عنوان پارامتر اصلی و متغیرعمده حل شوند.

گروه دوم مسایلی هستند که پارامتر زمان بصورت واضح درآن ظاهر نمی شوند. می توان این نوع مسایل را ادامه مسایل گروه اول دانست با این تفاوت که مجبوریم در این گروه مقادیر بحرانی بعضی از پارامترها را علاوه بر حالت پایا محاسبه کنیم.

گروه سوم مسایلی هستندکه تابع زمان می باشند و پارامتر زمان در آنها نقش عمده ای بازی می کند و بیانگر حالت گذرا می باشند.

در جدول یک مباحثی که در زمینه های مربوط به مکانیک خاک به روش اجزا محدود می توان به بررسی و حل آن مبادرت کرد به طور خلاصه یادآور می شویم.

جدول یک-زمینه کاربرد روش اجزای محدود

مسایل انتشاری	مسایل مقادیر ویژه	مسایل تعادلی	زمینه کاربرد
جریان گذرای حرارت در مکانیک جامدات و ساختمانها و ماشینهای حرارتی	-	پخش حرارت در جامد یا مایع در حالت پایا	انتشار حرارت
مسایل اندرکنش خاک-سازه تابع زمان تراوای گذرای آب در خاک وسنگ انتشار امواج تنش در خاک وسنگ	آنالیز و تعیین فرکانس طبیعی و مودهای ارتعاش سیستم سد-مخزن و بررسی اندرکنش دینامیکی خاک و سازه	آنالیز وبررسی گودبرداری،دیوارهای حایل،تونلها،اتصالات سنگها واندرکنش خاک-سازه آنالیز تنشها درخاک، سدها، شمعها و پی های ماشین آلات وساختمانها	ژئومکانیک
آنالیز جریان مایع نا پایا و انتشار امواج در محیطهای اشباع وصخره های آبگیر و مسایل جریان های هیدرومغناطیسی دینامیکی	آنالیز وتعیین فرکانس طبیعی حوضه های آبگیر و دریاچه ها و بنادر	آنالیز پتانسیل جریان، سطوح آزاد، لایه های مرزی جریان، جریانهای لزج و آنالیز و بررسی سازه های آبی و سدها	هیدرولیک و هیدرودینامیک مهندسی

توضیحات کلی در مورد درس روش اجزای محدود

راه حل های محیطهای پیوسته توسط روش اجزای محدود با گامهای مهم توضیح داده شده در زیر همراه است:

گام اول: شبکه بندی محیط پیوسته

این عمل به منظور تقسیم کردن محیط پیوسته به یک سری عناصر کوچک در ارتباط با یکدیگر انجام می پذیرد. در این گام باید یک سری شرایط خاص را مد نظرداشت تا راه حل تقریبی پیشنهاد شده به جوابهای سازگار و دقیق برسد. اندازه عناصر، تیپ عناصر، تعداد عناصر و نحوه ی کنار هم گذاری در این مرحله تصمیم گیری می شود.

گام دوم: انتخاب تابع درون یابی مناسب جهت تبدیل صحیح فرم انتگرال به فرم ماتریسی

در نحوه نگرش وانتخاب راه حل "تغییر مکان" معادلات تعادل نوشته شده روی هر عنصر با انتخاب مدل مناسبی تقریب می شود که این تقریب باید ازنقطه نظرمحاسباتی آسان و از نقطه نظر نتایج باید دقیق باشد. شرایط همگرایی راه حل باید در این مرحله کنترل شود. معمولا تابع درون یابی هرعنصر بصورت چند جمله ای درنظرگرفته می شود.

گام سوم: تعیین "ماتریس سختی عنصری" و بردارهای "نیرو"

برای هرعنصر تعیین شده درگام اول بر اساس معادلات نوشته شده و پس از تبدیل فرم انتگرالی معادلات به فرم ماتریسی آن، ماتریسهای سختی هرعنصر و بردار نیروی هرعنصر با استفاده از شرایط حدّی پس از استفاده از اصل حساب تغییرات بدست می آیند.

گام چهارم: کنار هم گذاری معادلات عناصر

به منظور دست یافتن به فرم کلی ماتریسی معتبر روی کلّ محیط تقسیم شده به عناصر باید ماتریس های موجود درهرمرحله را بانظم خاصی تبدیل به ماتریس کلی معادلات نمود. ماتریس ها و بردارهای حاصل درکل محیط معتبر هستند.

گام پنجم:معرفی شرایط حدّی درماتریس نهایی

گام ششم:حل معادله نهایی

فرم نهایی بدست آمده که بصورت $[K]\{j\}=\{F\}$ است توسط راه حلهای کلاسیک حل معادله دستگاههای خطی یا غیرخطی حل می شوند.

گام هفتم: محاسبات لازم به منظور تعیین پارامترهای جنبی مورد نیاز

در اینگونه محاسبات برحسب نیاز پارامترهای مشخصی را محاسبه کرده و عرضه می نماییم. مثلا اگر محاسبات بر حسب تغییر مکان ها انجام شده باشد و بخواهیم تنش ها را نیز داشته باشیم لازم است درزیربرنامه ای تنشها را برای عناصر حساب کنیم.

فصل اول:
تقریب توسط عناصرمحدود

1-1 تقریبها

1-1-1 تقریب گرهی:

در یک مدل ریاضی یک سیستم فیزیکی از متغیرها و توابع که توابع صحیح و دقیق نامیده می شوند استفاده می گردد: $U_{ex}(x)$. تابع تقریبی U(x) که جواب مدل ریاضی سیستم مورد نظر است همواره اختلافی با جواب دقیق دارد: باید $e(x)$ به حد کافی کوچک باشد تا جواب تقریبی را جواب مساله بدانیم:

$$e(x)=U(x)-U_{ex}(x) \qquad (1-1)$$

برای ساختن تابع جواب تقریبی می توان به طریق زیر عمل کرد:

-تابعی وابسته به n پارامتر a_i تعریف کرد یا انتخاب نمود $U(x,a_1,a_2,...,a_n)$

-پارامترهای a_i را طوری تعریف و تعیین کرد که رابطه(1-1)صادق باشد. به عنوان مثال می توانیم در چند نقطه تابع جواب $U(x)$ رابا $U_{ex}(x)$ یکسان کنیم. باید این توابع طوری انتخاب شوند که مشتق گیری و انتگرال گیری از آنها ساده باشد.

با مثال های زیر:

1)تابع تقریبی برای یک تابع شکل که فقط در چند نقطه شناخته شده است معرفی میگردد و

2)حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل را عرضه می کنیم.

مثال1-1:

حرارت در سه نقطه مطابق جدول شناخته شده است. برای نقاط دیگر توسط یک تابع حرارت را بیابید.

x	0	0.5	1
$U_{ex}(x)$	20°	25°	22°

حل. فرم چند جمله ای از درجه دوم را جهت جواب تقریبی اختیار می کنیم.

$$U(x,a_1,a_2,a_3)=a_1+a_2x+a_3x^2$$

$$U_{ex}(x=0)=U(x=0)=a_1=20^o$$

$$U_{ex}(x=0.5)=U(x=0.5)=a_1+0.5a_2+0.25a_3=25^o$$

$$U_{ex}(x=1)=U(x=1)=a_1+a_2+a_3=22^o$$

$$\Rightarrow a_1=20,\ a_2=18,\ a_3=-16$$

$$\rightarrow\ U_{ex}(x)\approx U(x)=20+18x-16x^2$$

مثال2-1: تقریب یک معادله دیفرانسیل تابع $U_{ex}(x)$ را پیدا کنید که شرایط زیر را ارضا کند:

-معادله دیفرانسیل : $\frac{d^2U_{ex}(x)}{dx^2} = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le 1$

-شرایط حدّی: $U_{ex}(x) = 0 \quad for \quad x = 0,\ x = 1$

-تابع $f(x)$ طوری است که $f(x = 0.75) = 0.25 \ , f(x = 0.25) = 1$

حل. تابع زیر را انتخاب می کنیم:

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = a_1 \sin(p\,x) + a_2 \sin(2p\,x)$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_1=0.25} = -a_1 p^2 \sin(0.25p) - 4a_2 p^2 \sin(0.5p) = f(x_1) = 1$$

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_2=0.75} = -a_1 p^2 \sin(0.75p) - 4a_2 p^2 \sin(1.5p) = 0.25$$

$$\rightarrow\ a_1 = -\frac{5}{4\sqrt{2}\,p^2}, \quad a_2 = -\frac{3}{32\,p^2}$$

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = -\frac{5}{4\sqrt{2}\,p^2}\sin(p\,x) - \frac{3}{32\,p^2}\sin(2p\,x)$$

این حرکت یک نوع مجزاسازی (discretisation) معادله دیفرانسیل است با دو معادله جبری.

در دو مثال بالا می بینیم که:

$$U(x) = P_1(x)a_1 + P_2(x)a_2 + \ldots + P_n(x)a_n \qquad (1-2)$$

$$U(x) = \langle P_1(x) \quad P_2(x) \quad \ldots \quad P_n(x)\rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle P\rangle\{a\} \qquad (1-3)$$

توابع P: توابع خطی مستقل، همیشه نمی توان وضع خطی داشت.

a_i : پارامترهای تقریب، عموماً مفهوم فیزیکی ندارد ولیکن می توان بجای a مقادیر $U_{ex}(x)$ را در n نقطه با مختصات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ که گره می نامیم انتخاب کنیم.

$$U(x_1)=U_{ex}(x_1)=U_1$$
$$U(x_2)=U_{ex}(x_2)=U_2$$

در این صورت تابع تقریب بصورت زیرخواهد بود:

$$U(x)=N_1(x)U_1+N_2(x)U_2+...+N_n(x)U_n \quad (1-4)$$

$$U(x)=\langle N_1(x) \quad N_2(x) \ .... \ N_n(x)\rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \langle N\rangle\{U\} \quad (1-5)$$

N_iها ضرایب a_i هستند که در U_{exact} صدق می کنند.

پارامت a_i : پارامترهای عمومی تقریب

پارامتر U_i: پارامترهای گرهی یامتغیرهای گرهی

رابطه(1-3) یک تقریب غیرگرهی را تعریف می کند.

رابطه(1-5) یک تقریب گرهی را تعریف می کند.

توابع P_x : توابع پایه تقریب هستند(function de base)

توابع$N(x)$: توابع درونیابی(function de interpolation)

*با استفاده از توابع درونیابی$N(x)$ که در توابع U_{exact} صدق می کنند یک تقریب گرهی را با رابطه $U(x)=N(x).U_n$ می سازیم.

با توجه به روابط 1-4 و 1-5 تقریب گرهی خواص زیر را خواهد داشت:

-چون $U(x_i)=U_i$ می باشد توابع N_i روابط زیر را اقناع می کند:

$$N_j(x_i)=\begin{cases} 0 & if \quad i\neq j \\ 1 & if \quad i=j \end{cases}$$

-خطای تقریب تعریف شده توسط برای $e(x)=U(x)-U_{ex}(x)$ نقاط گره x_i معادل صفر است.

$$e(x_i)=0$$

مثال1-3: تقریب گرهی ازنوع لاگرانژ

تابع $U_{ex}(x)$ که در چهار نقطه شناخته شده است را در نظر می گیریم

$$U(x)=N_1(x)U_1+N_2(x)U_2+N_3(x)U_3+N_4(x)U_4$$

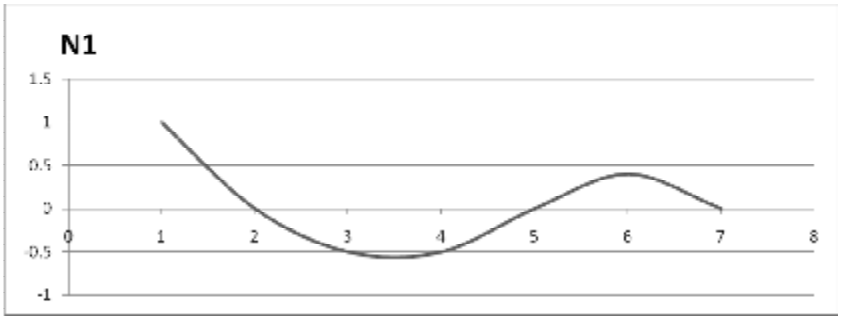
که در آن N_i چندجمله ای لاگرانژ از درجه ی سوم با فرم زیر است:

$$N_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

رابطه 6-1 توسط این فرم اقناع می شود مثلاً N_1 به فرم زیراست:

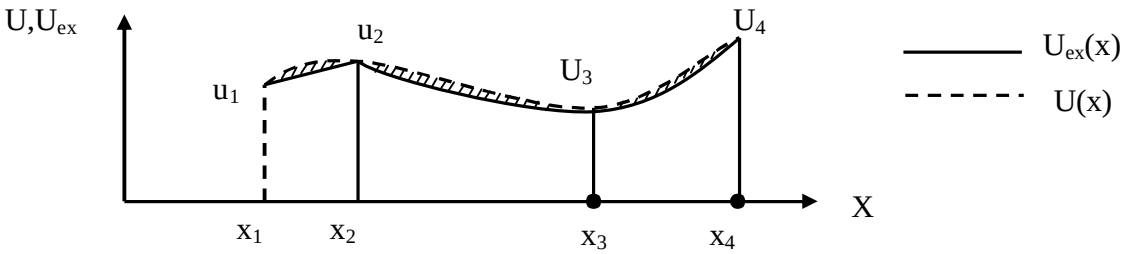
$$N_1(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

مثلا اگر $x_4=7, x_3=5, x_2=2, x_1=1$ باشد تابع N_1 به شکل زیر است:



$$N_1=-\frac{1}{24}(x-2)(x-5)(x-7)$$

x	1	1.5	2	3	4	5	6	7
N_1	1	77/192	0	-1/3	-1/9	0	1/6	0



اگر چند متغیر داشته باشیم، کلیه مفاهیم بالا به چند متغیر نیز گسترش خواهد یافت.

$$\|n\|=\sqrt{<\Delta u^i>\{\Delta u^i\}}$$

$$X=(x\ \ y\ \ z)$$

x متعلق به قلمرو v می باشد.

معادله 5-1 به صورت زیر نوشته میشود

$$u(x,y,z)=u(X)=<N_1(X)\ \ N_2(X).....N_n(X)>\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\\u_n\end{Bmatrix}=<N>\{u_n\}\qquad(1-9)$$

رابطه 4-1باید اقناع شود: $U(X_i)=U_{ex}(X_i)=U_i$ که در آن: $X_i=\langle x_i\ \ y_i\ \ z_i\rangle\quad i=1,2,...,n$ مختصات گره ها هستند.

1-1-2- تقریب توسط عناصر:

هنگامیکه تعداد گره‌ها (n) و در نتیجه تعداد پارامترها زیاد می شوند مسأله تخمین رابطه تقریبی مشکل میشود، اگر قلمرو هم فرم پیچده ای داشته باشد مسأله مشکلتر میشود.

روش "تقریب گرهی در زیر قلمرو" روش روشنی است که اجازه ساختن تابع U(x) را توسط کامپیوتر می دهد. این روش شامل مراحل زیر است:

1- ساختن زیر قلمرو V^e از قلمرو V

2-تعریف تابع تقریبی $U^e(x)$ روی هر یک از زیر قلمروهای V^e توسط متد تقریب گرهی هر تابع $U^e(x)$ میتواند به متغیرهای گرهی زیر قلمروهای دیگر نیز ارتباط داشته باشد مثل تقریبهای Spline

روش تقریب توسط عناصر محدود، روش تقریب خاص توسط زیرقلمرو است که خصوصیات زیر را دارد:

- تقریب گرهی روی زیر قلمرو V^e که فقط متغیرهای گرهی زیر قلمرو V^e را دخالت می دهد.
- تابع تقریبی $U^e(x)$ روی زیر قلمرو V^e به صورت پیوسته روی V^e ساخته شده است و شرط پیوستگی بین زیرقلمروها را نیز تأمین میکند.

تعاریف

- هر زیرقلمرو یک «عنصر» نامیده میشود.
- نقاطی که تابع تقریبی با تابع دقیق یکسان است، نقاط درون یابی یا نقاط گرهی نامیده میشوند.
- x_i «مختصات گرهی» نامیده میشود.
- مقادیر $U_i=U_{ex}(x_i)=U^e(x_i)$ «متغیرهای گرهی» نامیده میشوند.

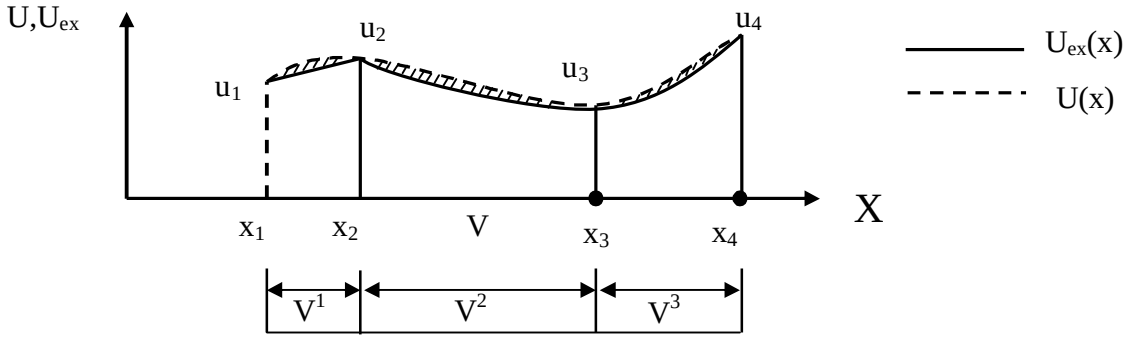
در این تقریب دو نقطه نظر مشخص زیر عرضه میشود:

1- باید به صورت تحلیلی هندسه عناصر تعریف گردد.

2- توابع درون یابی برای هر المان ساخته شود.

مثال 4-1 :

تقریب توسط اجزاء محدود برای یک بعدی



- تعریف هندسه المان

گره s : 1و 2و 3و 4

مختصات گرهی: x_4, x_3, x_2, x_1

قلمرو کامل: $V : x_1 \le x \le x_4$

زیر قلمروها (عناصر):

$$V^1 = x_1 \le x \le x_2$$

$$V^2 = x_2 \le x \le x_3$$

$$V^3 = x_3 \le x \le x_4$$

- ساختن تابع تقریبی $U^e(x)$

- متغیر گرهی: $U_1, U_2, U_3, U_4 az$

- تابع تقریب خطی روی هر المان

- **المان** 1 : زیر قلمرو V^1

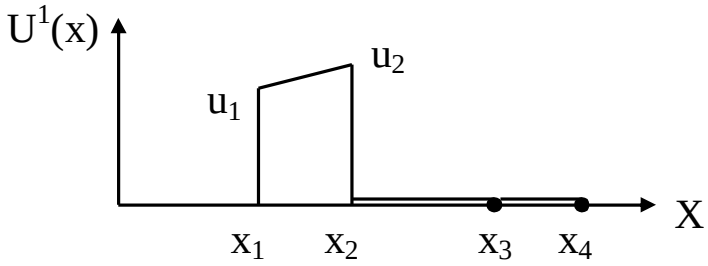
$$U^1_{(x)} = N_1 U_1 + N_2 U_2$$

N_1 و N_2 توابع خطی هستند که رابطه 6-1 را اقناع می کنند:

$$N_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \qquad N_1(x_1) = 1 \qquad , \qquad N_1(x_2) = 0$$

$$x_1 \le x \le x_2$$

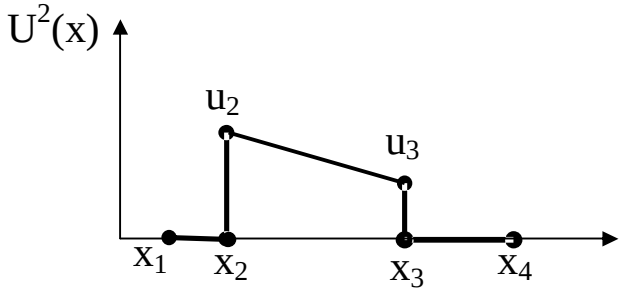
$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad N_2(x_1) = 0 \qquad , \qquad N_2(x_2) = 1$$



المان 2 :

$$U^2(x) = N_1 U_2 + N_2 U_3$$

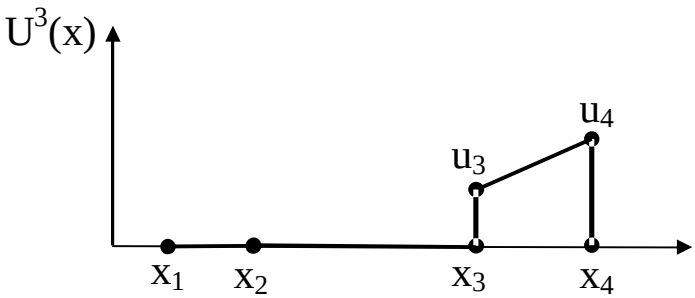
$$N_1 = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \quad , \quad N_2 = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \quad ; \quad x_2 \le x \le x_3$$



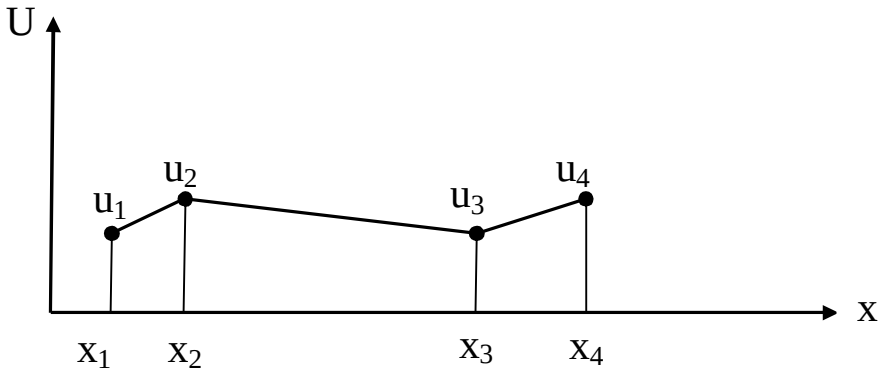
المان 3 :

$$U^3(x) = N_1 U_3 + N_2 U_4$$

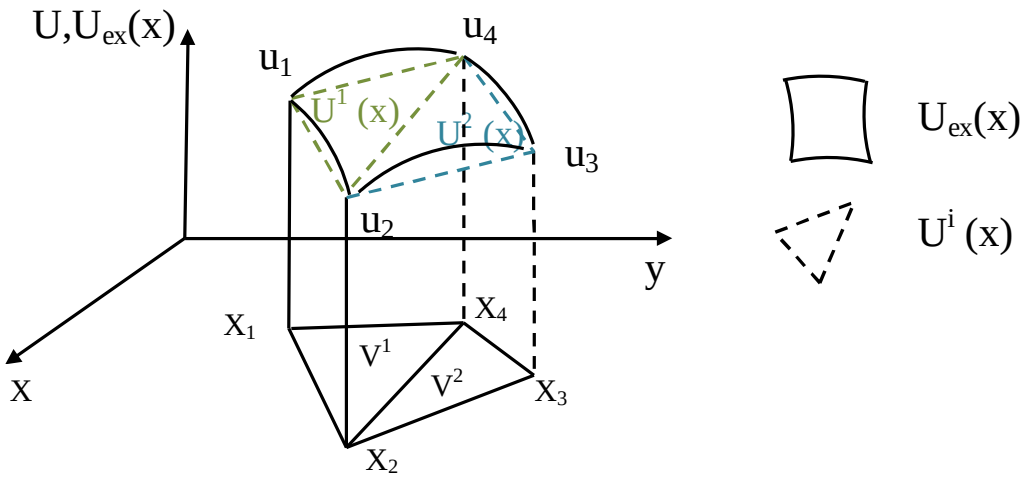
$$N_1 = \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \quad , \quad N_2 = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \quad ; \quad x_3 \le x \le x_4$$



توابع $U^e(x)$ و $N_i(x)$ برای هر عنصر متفاوت است، این توابع خارج از هر المان صفرند. جمع این توابع، تابع کلی تقریب را می‌دهد. $U^1 + U^2 + U^3 = U$



مثال 5-1 : تقریب خطی برای دو بعدی $X =< x \;\; y >$



<u>تعریف هندسه مسأله</u>

گره: 1و2و3و4

مختصات گرهی: x_1, x_2, x_3, x_4

قلمرو کامل: V چهار وجهی 1-2-3-4

المان‌ها: V^1 : مثلث 1-2-4

المان‌ها: V^2 : مثلث 2-3-4

<u>ساختن تابع تقریب</u> $U^e(x)$

متغیر گرهی : U_4 و U_3 و U_2 و U_1

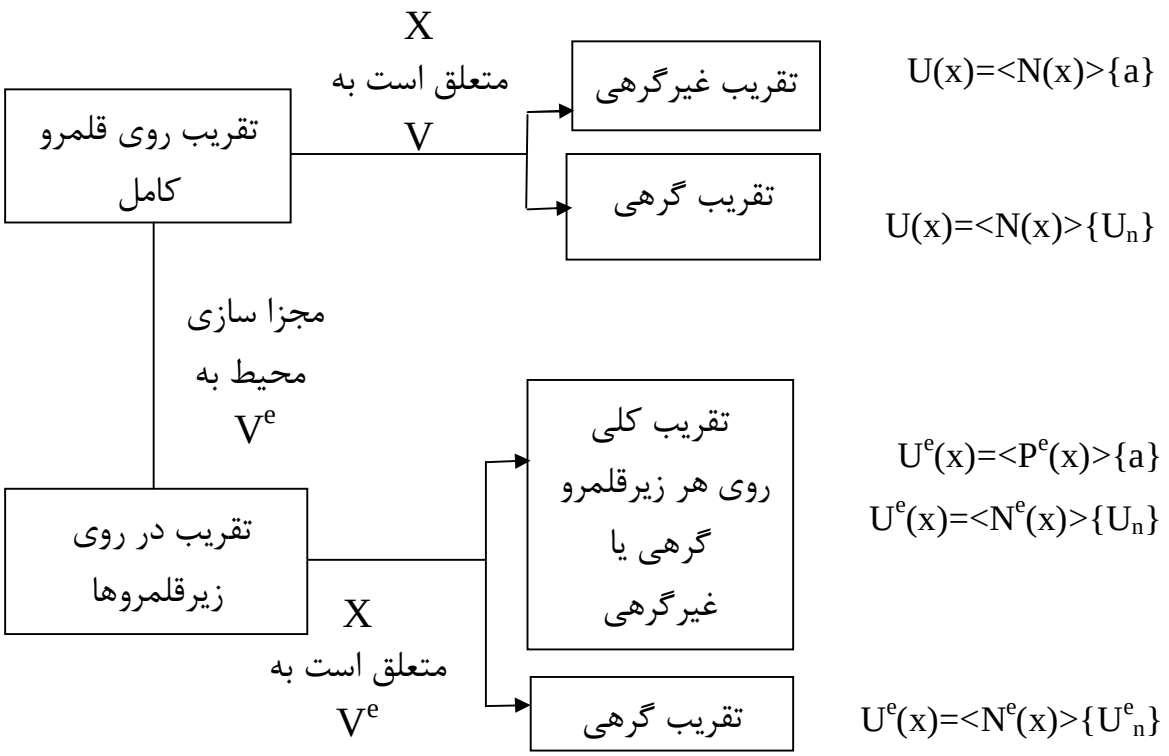
تابع تقریبی $U^e(x)$ خطی برای هر المان:

المان 1 : $U^1(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_4$

N_1 تابع خطی بر حسب x و y است که در x_1 مقدار 1 را دارد و در x_2 و x_4 صفر است.

المان 2 : $U^2(x) = N_1(x)u_2 + N_2(x)u_3 + N_3(x)u_4$

خلاصه متدهای تقریب



2- تقریب هندسه المان‌ها

2-1 : گره هندسی

مجموعه‌ای از $\bar{n}$ نقطه روی قلمرو v که هندسه المان‌ها را تعریف می‌کنند انتخاب می‌شوند. این نقاط «گره‌های هندسی» نامیده می‌شوند و می‌توانند با نقاط درون یابی یکسان باشند. کل قلمرو v توسط زیر

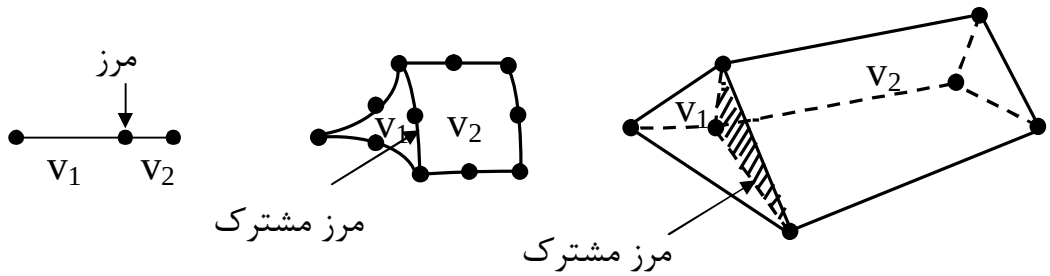
قلمروهای v^e که شکل‌های ساده‌ای دارند جایگزین می‌شود. هر زیر قلمرو v^e (عنصر) بر حسب مختصات گره‌های هندسی متعلق به همان عنصر به طور تحلیلی کاملا تعریف شده است.

در مثال‌های 4-1 و 5-1 ، گره‌های 4و3و2و1 گره‌های هندسی هستند، در مثال اوّل که یک بعدی است عناصر از دو گروه تشکیل شده و در مثال دوم هر عنصر بر حسب مختصات سه گره تشکیل دهنده مثلث تشکیل گردیده است.

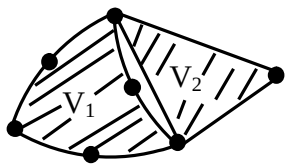
1-2-2: قاعده کلی مجزا سازی قلمرو توسط عناصر

قسمت کردن قلمرو کامل توسط عناصر v^eباید دو قاعده کلی زیر را پاسخگو باشد:

- دو عنصر مجاور فقط نقاط واقع بر مرزهای مشترک خود را در اشتراک دارند. با این قاعده از روی هم رفتن عناصر جلوگیری می‌کنیم. مرز مشترک بین المان‌ها می‌تواند به نقطه، خط (مستقیم یا منحنی) و یا صفحه باشد.



- مجموعه کلیه عناصر باید کاملا قلمرو v را بپوشاند، هیچ فضای خالی در بین المان‌ها نباید موجود باشد.



هنگامی که مرز قلمرو V منحنی الخط است و یا سطوح منحنی شکلی است که ممکن است توسط المان‌های خطی کاملاً پوشیده نشود، خط‌های غیرقابل اجتنابی ایجاد می‌گردد که به آن «خطای مجزاسازی هندسی» می‌گوییم. باید با انتخاب المان‌های کوچک و یا المان‌های منحنی شکل این خط را تا حد ممکن تقلیل داد.

در قاعده فوق الذکر در صورت ساختن المان‌ها با روش زیر حتماً رعایت می‌شوند:

- هر عنصر توسط مختصات گره‌های هندسی روی این عنصر به صورت منحصر به فردی تعریف شده باشد. معمولا این گره‌ها روی مرزهای المان‌ها واقع و بین چند عنصر به اشتراک گذاشته شده‌اند.

- در المان‌های دو یا سه بعدی که مرز المان‌ها از مجموعه‌ای از منحنی‌ها و یا سطوح تشکیل شده‌اند، هر بخش از مرز المان به صورت منحصر به فردی توسط مختصات گره‌های هندسی که فقط روی آن بخش از مرز واقعند تعریف شوند. به این ترتیب بخش‌های مشترک مرز دو عنصر به صورت واحدی تعریف می‌گردند.

3-2-1 : **فرمول‌های کلاسیک عناصر**

در زیر فرمول‌های متداول و طبیعی المان‌های یک، دو و یا سه بعدی عناصر تعریف می‌گردند: تعداد گره‌ها در پرانتز کنار اسم عناصر نوشته شده است.

a): عناصر یک بعدی:

خطی (2) کوادراتیک (3) کوبیک (4)

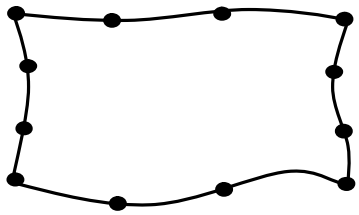
b): عناصر دو بعدی:

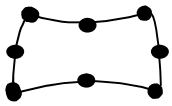
معمولا مثلث یا چهار وجهی هستند که اضلاع آنها از منحنی‌های چند جمله‌ای درجه اوّل، دوم و سوم تشکیل شده‌اند:

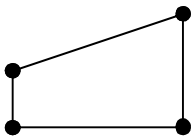
- عناصر مثلثی:

خطی (3) کوادراتیک (6) کوبیک (9)

- عناصر چهار وجهی:



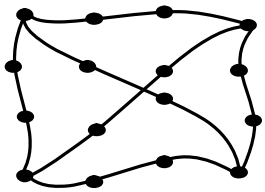


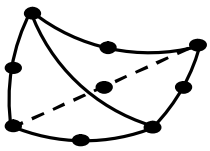


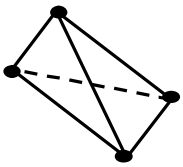
c): عناصر سه بُ کوبیک (12) کوادراتیک (8) خطی (4)

عناصر چهار وجهی (هرمی شکل)، شش وجهی (مکعبی شکل) و یا پنج وجهی (منشوری شکل) هستند که هر وجه توسط سطوح چند جمله‌ای درجه اول، دوم و سوم تشکیل شده است:

- عناصر چهار وجهی:

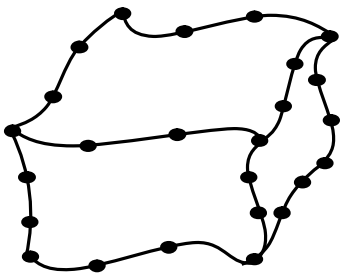


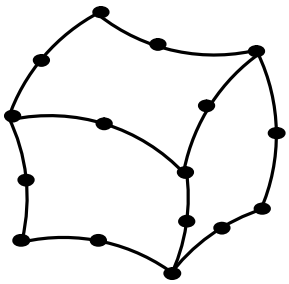


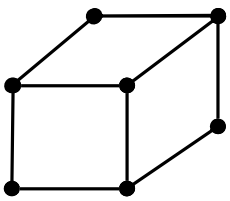


کوبیک(16) کوادراتیک(10) خطی(4)

- عناصر شش وجهی:

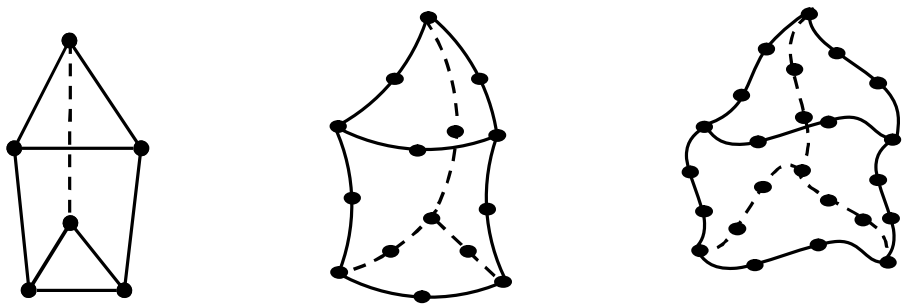






کوبیک(32) کوادراتیک(20) خطی(8)

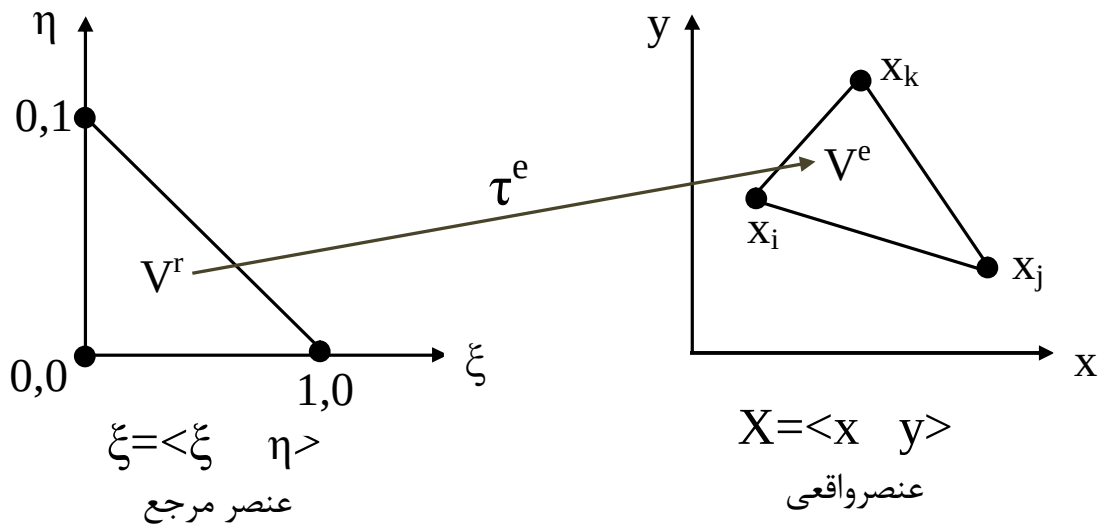
- عناصر پنج وجهی:



خطی(6) کوادراتیک(15) کوبیک(24)

4-2-1 : **عنصر مرجع**

برای اینکه بتوان تعریف تحلیلی عناصر پیچیده را آسان نمود، عنصر مرجع تعریف می‌شود: عنصر مرجع (V^r) عنصری با شکل بسیار ساده است که در فضای مرجع تعریف می‌گردد و می‌تواند به عناصر واقعی V^e توسط یک تبدیل هندسی τ^e تبدیل شود. در مورد یک مثلث می‌توان نوشت:



تبدیل τ^e مختصات x^e هر نقطه از عنصر واقعی را بر حسب مختصات ξ نقاط نظیر روی المان مرجع تعریف می‌کند.

$$t^e : x \rightarrow Xe = X^e(x)$$

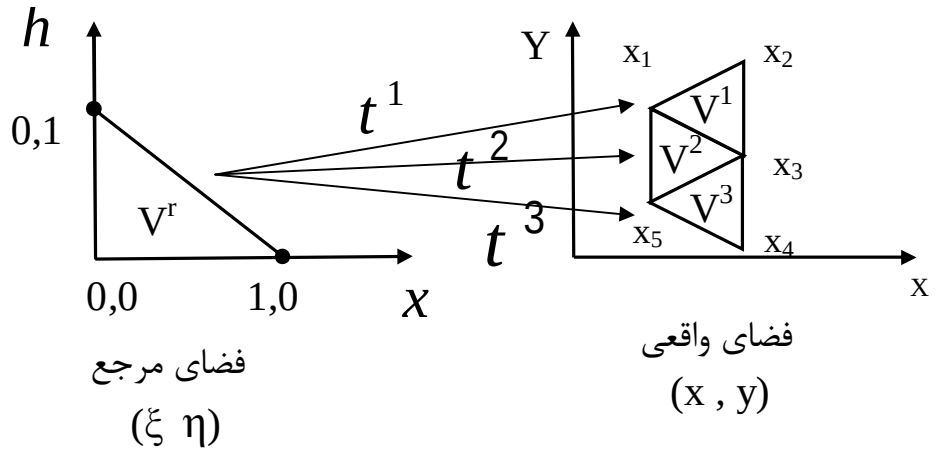
تبدیل τ^e به شکل و محل عنصر واقعی بستگی دارد در نتیجه به مختصات نقاط هندسی (گره‌های هندسی) که آن را تعریف می‌کنند وابسته است. در نتیجه برای هر المان واقعی یک تبدیل ویژه و مختلف با بقیه تبدیل‌ها موجود است.

$$t^e : x \rightarrow X^e = X^e(x, x_i, x_j, x_k, ...)$$

x_i و x_j و x_k و ... مختصات گره‌های هندسی متعلق به المان e می‌باشند. تبدیل‌های τ^e باید بتوانند المان‌های واقعی که قواعد ذکر شده در قبل را اقناع کنند تولید نمایند، لذا این تبدیل‌ها باید خواص زیر را دارا باشند:

- این تبدیل «بیژکتیو» است یعنی به ازای هر نقطه از المان واقعی فقط یک نقطه نظیر روی المان مرجع موجود است و بالعکس.
- گره‌های هندسی المان واقعی نظیر گره‌های هندسی المان مرجع هستند.
- هر بخش از مرز المان مرجع که توسط گره‌های هندسی این مرز تعریف شده‌اند. نظیر بخشی از مرز المان واقعی است که توسط گره‌هایی نظیر تعریف شده‌اند.

یادآوری می‌کنیم که یک المان مرجع می‌تواند توسط تبدیل‌های متفاوت τ^e المان‌های واقعی یک قلمرو کامل V را تولید کند.



1st element : $t^1 : x \rightarrow X^1 = X^1(x, x_1, x_3, x_2)$

2nd element: $t^2 : x \rightarrow X^2 = X^2(x, x_1, x_5, x_3)$

3rd element : $t^3 : x \rightarrow X^3 = X^3(x, x_5, x_4, x_3)$

در نتیجه می‌توان تبدیل خطی‌ای را تعریف کرد که نسبت به مختصات $\{x_n\}$ گره‌های هندسی عنصر واقعی V^e نوشته شده باشد:

$$t : x \rightarrow X(x) = \left[\bar{N}(x)\right]\{x_h\}$$

می‌توان توابع یکسان تبدیل برای مختصات مختلف اختیار کرد:

$$x(x) = <\bar{N}(x)>\{x_h\}$$
$$y(x) = <\bar{N}(x)>\{y_h\}$$
$$z(x) = <\bar{N}(x)>\{z_h\}$$

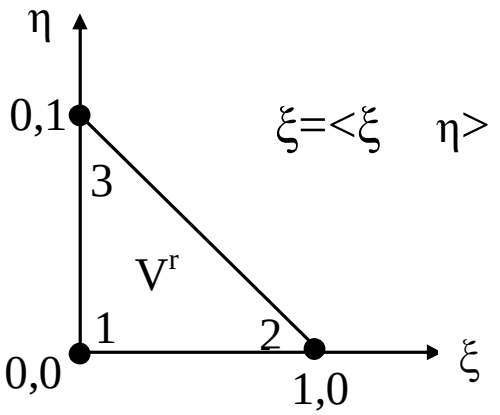
مثلا برای یک مثلث با مختصات $x_i\ x_j\ x_k$:

$$x(x,h) = \bar{N}_1(x,h)x_i + \bar{N}_2(x,h)x_j + \bar{N}_3(x,h)x_k = <\bar{N}>\begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix}$$

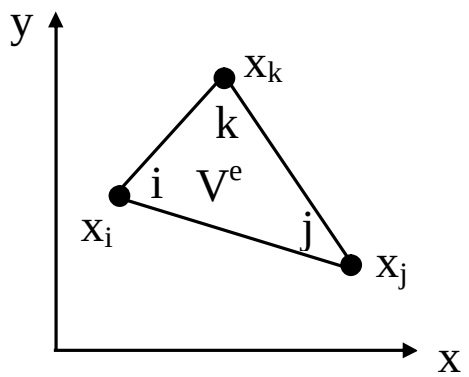
$$y(x,h) = \bar{N}_1(x,h)y_i + \bar{N}_2(x,h)y_j + \bar{N}_3(x,h)y_k = <\bar{N}>\begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix}$$

توابع $\bar{N}_i$ که معمولا چند جمله‌ای‌هایی بر حسب ξ هستند «توابع تبدیل هندسی» نامیده می‌شوند.

مثال 9-1 : تعریف تحلیلی المان مثلثی با سه گره



فضای مرجع، المان مرجع



عنصر مرجع به صورت تحلیلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x + h = 1$$
$$x \geq 0$$
$$h \geq 0$$
$$h - 1 = -1(x)$$
$$m = \frac{1}{-1} = -1$$

تبدیل خطی τ بر حسب ξ و η در نظر می گیریم:

$$x(x,h) = <1-x-h \quad x \quad h> \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix}$$

$$y(x,h) = <1-x-h \quad x \quad h> \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix}$$

سه خاصیت ذکر شده اقناع شده‌اند:

- گره‌های هندسی V^r با مختصات $<0\ 1>,<1\ 0>,<0\ 0>$ تبدیل به گره‌های هندسی V^e با مختصات x_k و x_j و x_i شده‌اند مثلا:

$$x(x=0,h=0) = <1 \quad 0 \quad 0> \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} = x_i$$

- هر مرز از v^r به مرز نظیر در V^e تبدیل شده است. مثلا مرز گذرنده از $<0\ 1>,<1\ 0>$ که معادله آن $1-x-h = 0$ است به مرز گذرنده از x_k و x_j تبدیل شده است که معادله پارامتریک آن به شرح زیر است:

$$x < 0 \quad x \quad 1-x > \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} = x\,x_j + (1-x)x_k$$

$$y < 0 \quad x \quad 1-x > \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} = x\,y_j + (1-x)y_k$$

معادلات خطی بر حسب ξ و η هستند و فقط به x_j و x_k وابسته می‌باشند که گره‌های روی مرز مزبور می‌باشند.

- تبدیل t بیژکتیو است اگر ماتریس ژاکوبین منفرد نباشد (صفر نباشد)

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial h} & \dfrac{\partial y}{\partial h} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{bmatrix}$$

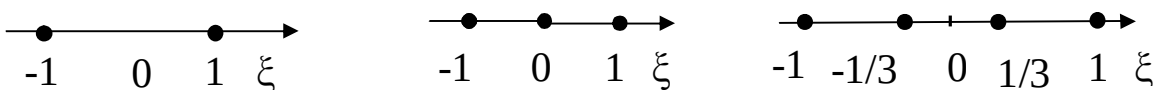
$$\det(J)=(x_j - x_i)(y_k - y_i)-(x_k - x_i)(y_j - y_i)=2A$$

چون مساحت است فقط وقتی صفر می‌شود که رئوس در امتداد هم قرار گیرند.

5-2-1 : **شکل‌های عناصر مرجع کلاسیک**

در زیر فرم ، عبارت تحلیلی عناصر مرجع کلاسیک داده می‌شوند.

a) المان‌های یک بعدی



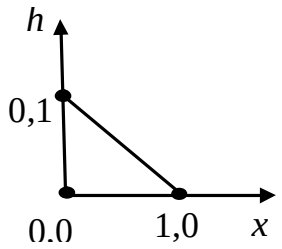
خطی(2) کوادراتیک(3) کیوبیک(4)

$$V^r:\ -1 \le x \le 1$$

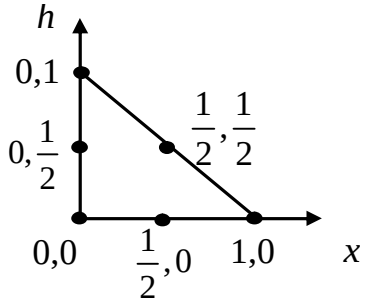
b) عناصر دو بعدی

$$-1 \le x \le 1$$
$$-1 \le h \le 1$$
$$V^r:\begin{cases} x+h \le 1 \\ x \ge 0 \\ h \ge 0 \end{cases}$$

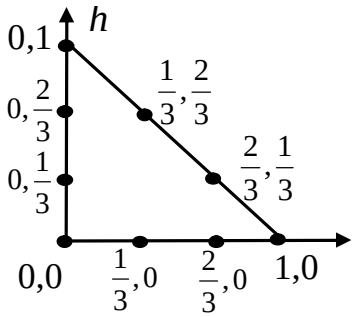
- عناصر مثلثی



خطی(3)



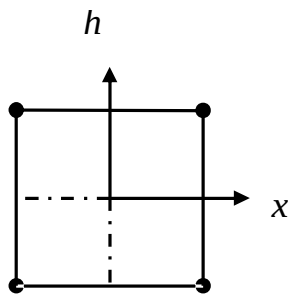
کوادراتیک(6)



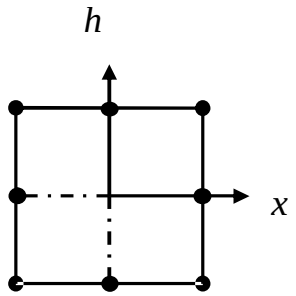
کیوبیک(9)

- عناصر مربعی

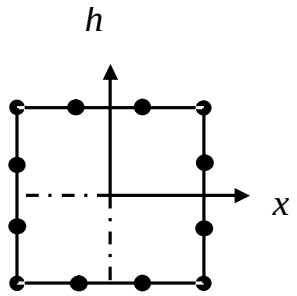
$$V^r:\begin{cases}-1 \le x \le 1\\ -1 \le h \le 1\end{cases}$$



خطی(4)



کوادراتیک(8)

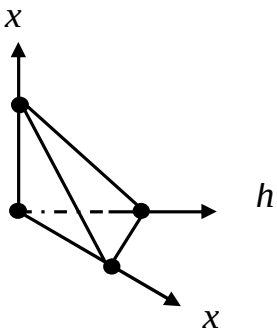


کیوبیک(12)

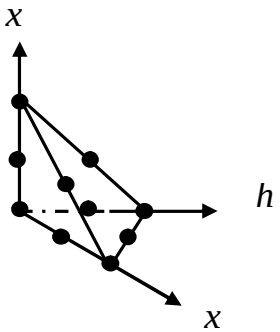
c) عناصر مرجع سه بعدی

- عناصر چهار وجهی :

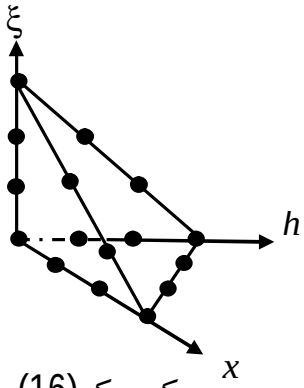
$$V^r:\begin{cases}x+h+z \le 1\\ x \ge 0\\ h \ge 0\\ z \ge 0\end{cases}$$



خطی(4)



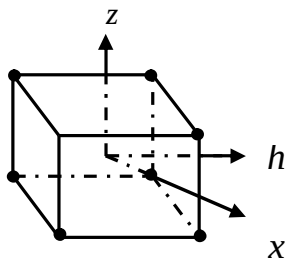
کوادراتیک(10)



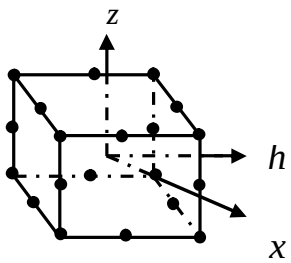
کیوبیک(16)

- عناصر مکعبی

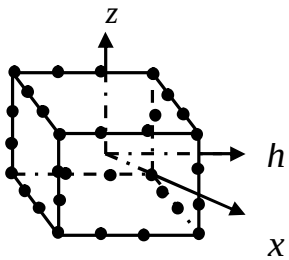
$$V^r : \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le h \le 1 \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$$



خطی(8)



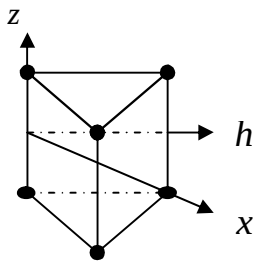
کوادراتیک(20)



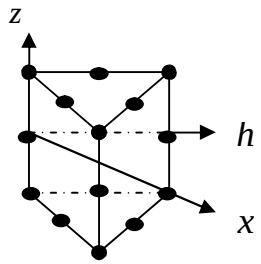
کیوبیک(32)

- عناصر منشوری

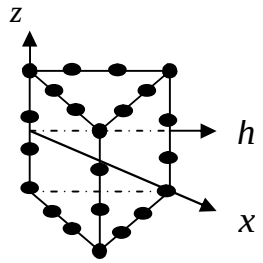
$$V^r : \begin{cases} x + h \le 1 \\ x \ge 0 \\ h \ge 0 \\ -1 \le z \le 1 \end{cases}$$



خطی(6)



کوادراتیک(15)



کیوبیک(24)

1: تقریب روی یک المان مرجع

1-3-1: عبارت تابع تقریبی o(x)

روی قلمرو V مجموعه‌ای از n گره درون یابی با مختصات x_i انتخاب شده‌اند. این گره‌ها همان گره‌های هندسی نیز هستند. روی عنصر V^e تقریبی گره از نوع (1-5) را اختیار می کنیم.

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = < N_1(x) \quad N_2(x) \ldots\ldots N_{n^e}(x) > \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n^e} \end{Bmatrix} =< N(x) > \{u_n\} \qquad (1-13)$$

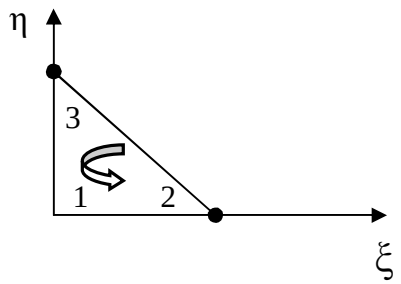
x متعلق به V^e و $u_{n^e}, \ldots, u_2, u_1$ مقادیر دقیق U_{ex} روی گره های درون یابی عنصر هستند، N(x) توابع درون یابی روی المان واقعی می باشند. اگر تقریب روی عنصر واقعی را با تقریب روی عنصر مرجع جایگزین کنیم:

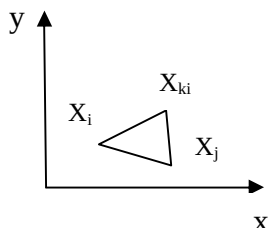
$$U_{ex}(x) \approx U(x) = < N(x) > \{u_n\} \qquad (1-14)$$

با $t : x \to x(x) = \left[\bar{N}(x)\right]\{x_n\}$ که در آن $\{u_n\}$ متغیرهای گرهی عنصر و $\bar{N}(x)$ توابع درون یابی روی عنصر مرجع می‌باشند.

مثال 11-1 :

توابع درون یابی روی یک مثلث سه گرهی





گره های درون یابی همان گره های هندسی هستند.

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

درون یابی خطی روی عنصر واقعی با فرم (15-1) به صورت زیر نوشته می شود:

$$U(x,y) = < N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y) > \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}\left[(y_k - y_j)(x_j - x) - (x_k - x_j)(y_j - y)\right]$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A}\left[(y_i - y_k)(x_k - x) - (x_i - x_k)(y_k - y)\right]$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}\left[(y_j - y_i)(x_i - x) - (x_j - x_i)(y_i - y)\right]$$

$$2A(x_k - x_j)(y_i - y_j) - (x_i - x_j)(y_k - y_j)$$

تقریب روی عنصر مرجع به صورت زیر است:

$$U(x,h) = < N_1(x,h) \quad N_2(x,h) \quad N_3(x,h) > \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x,h) = 1 - x - h$$
$$N_2(x,h) = x$$
$$N_3(x,h) = h$$

به شرط آن که نقاط (x,h) و (x,y) توسط تبدیل τ به صورت زیر مطابق باشند عبارت $U(x,y), U(x,h)$ یکسان خواهند بود.

$$t : \begin{cases} x(x,h) = < \bar{N}_1 \quad \bar{N}_2 \quad \bar{N}_3 > \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} \\ y(x,h) = < \bar{N}_1 \quad \bar{N}_2 \quad \bar{N}_3 > \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} \end{cases}$$

که در آن $\bar{N}_1 \equiv N_1$, $\bar{N}_2 \equiv N_2$, $\bar{N}_3 \equiv N_3$ ← برای اینکه المان ایزوپارامتریک بماند.

1-3-2 : **ویژگی های تابع تقریبی U(x)**

a) ویژگی های اصلی تقریب گرهی

b) پیوستگی روی عنصر

c) پیوستگی بین عناصر

d) توابع درون یابی چند جمله ای کامل

1-4 : **ساختن توابع** $N(x)$, $\bar{N}(x)$

توابع تبدیل هندسی $\bar{N}(x)$ و توابع درون یابی $N(x)$ روی المان مرجع همان خواص ذکر شده این دو تابع برای المان واقعی را باید دارا باشند. (1-3-2 و 1-2-4)

1-4-1: **روش کلی ساخت**

a) انتخاب چند جمله ای پایه:

انتخاب چند جمله‌ای پایه یکی از گام‌های اصلی ساخت توابع بالا است. $U(x)$ را روی المان مرجع به صورت زیر نمایش می‌دهیم که در آن ترکیب خطی تک جمله‌ای‌های شناخته شده‌ای در نظر گرفته شده‌اند $P_1(x)$, $P_2(x)$:

$$U(x) = < P_1(x) \quad P_2(x) \quad ..... > \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{nd} \end{Bmatrix} = < P(x) > \{a\} \qquad (1-18)$$

مجموعه توابع $P(x)$ پایه چند جمله ای تقریب را تشکیل می دهند. تعداد آنها مساوی تعداد متغیرهای گرهی یا درجه آزادی عنصر می باشد. (nd)

معمولا پایه چند جمله‌ای کامل استفاده می‌کنیم. جدول زیر تعداد تک جمله‌ای‌های لازم برای ساختن چند جمله‌ای کامل را تشریح می‌کند.

درجه چندجمله‌ای	یک بعدی	دو بعدی	سه بعدی
r	n_d	n_d	n_d
1	2	3	4
2	3	6	10
3	4	10	20
4	5	15	35
5	6	21	56

دیمانسیون	درجه چند جمله‌ای	پایه چند جمله‌ای <P>	n_d
		کامل	
1 1	1 2	خطی $<1 \;\; x>$ کوادراتیک $<1 \;\; x \;\; x^2>$	2 3
2 2	1 2	خطی $<1 \;\; x \;\; h>$ کوادراتیک $<1 \;\; x \;\; h \;\; x^2 \;\; xh \;\; h^2>$	3 6
3 3	1 2	خطی $<1 \;\; x \;\; h \;\; z>$ کوادراتیک $<1 \;\; x \;\; h \;\; z \;\; x^2 \;\; xh \;\; h^2 \;\; hz \;\; z^2 \;\; xz>$	4 10
		ناقص	
2 3	2 3	(دو خطی) $<1 \;\; x \;\; h \;\; xh>$ $<1 \;\; x \;\; h \;\; z \;\; xh \;\; hz \;\; xz \;\; xhz>$	4 8

برای ساختن توابع تبدیل هندسی $\overline{N}$ عبارت x را با همان فرم انتخاب می کنیم.

$$x(x)=<\overline{P}(x)>\{a_x\}$$
$$y(x)=<\overline{P}(x)>\{a_y\} \qquad (1-19)$$
$$z(x)=<\overline{P}(x)>\{a_z\}$$

تعداد توابع $\overline{P}(x)$ و ضرایب $\{a_x\},\{a_y\},\{a_z\}$ با تعداد گره های هندسی عنصر $\overline{n}^e$ برابر است.

تعاریف:

{a}: متغیرهای کلی عنصر در مقابل متغیرهای گرهی $\{u_n\}$

- $U(x)=<\overline{P}(x)>\{a\}$ تقریب کلی را در مقابل $U(x)=<N(x)>\{u_n\}$ تقریب گرهی تعریف می کند.

- $\{a_z\},\{a_y\},\{a_x\}$ مختصات کلی نامیده می‌شوند در مقابل مختصات گرهی $\{z_n\},\{y_n\},\{x_n\}$

b) رابطه بین متغیرهای کلّی و متغیرهای گرهی:

می دانیم که برای هر گره درون یابی با مختصات $\{x_i\}$، تابع $u\{x\}$ مقدار گرهی $u_i = u_{ex}\{x_i\}$ را به خود می گیرد.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_d} \end{Bmatrix} = \{u_n\} = \begin{bmatrix} <P_1(x_1) & P_2(x_1) & \dots & P_{n_d}(x_1)> \\ <P_2(x_1) & P_2(x_2) & \dots & P_{n_d}(x_2)> \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ <P_1(x_{n_d}) & P_2(x_{n_d}) & \dots & P_{n_d}(x_{n_d})> \end{bmatrix} \{a\}$$

$$\{u_n\} = [P_n]\{a\} \qquad (1-20)$$

در نتیجه

$$\{a\} = [P_n]^{-1}\{u_n\} \qquad (1-21)$$

اگر روابط (1-19) را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \{x_n\} &= [\bar{P}_n]\{a_x\} \\ \{y_n\} &= [\bar{P}_n]\{a_y\} \qquad (1-22) \\ \{z_n\} &= [\bar{P}_n]\{a_z\} \end{aligned}$$

می توان بعد از عکس کردن نوشت:

$$\begin{aligned} \{a_x\} &= [\bar{P}_n]^{-1}\{x_n\} \\ \{a_y\} &= [\bar{P}_n]^{-1}\{y_n\} \qquad (1-23) \\ \{a_z\} &= [\bar{P}_n]^{-1}\{z_n\} \end{aligned}$$

c) عبارات $\bar{N}, N$

با گذاشتن روابط (1-21) ر (1-18) داریم:

$$\begin{aligned} U(x) &= <P(x)>[P_n]^{-1}\{u_n\} \\ U(x) &= <N(x)>\{u_n\} \qquad (1-24) \\ <N(x)> &= <P(x)>[P_n]^{-1} \end{aligned}$$

برای $\bar{N}$ به همین طریق خواهیم داشت:

$$x(x) = <\bar{N}(x)>\{x_n\}$$
$$y(x) = <\bar{N}(x)>\{y_n\}$$
$$z(x) = <\bar{N}(x)>\{z_n\} \qquad (1-25)$$

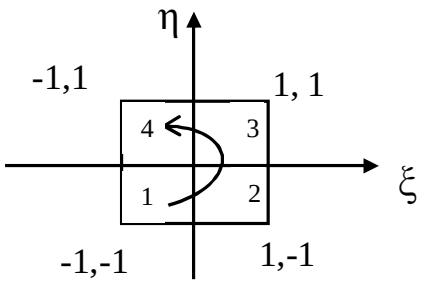
$$<\bar{N}(x)> = <\bar{P}(x)>[\bar{P}_n]^{-1}$$

d) مشتق گیری از تابع u(ξ)

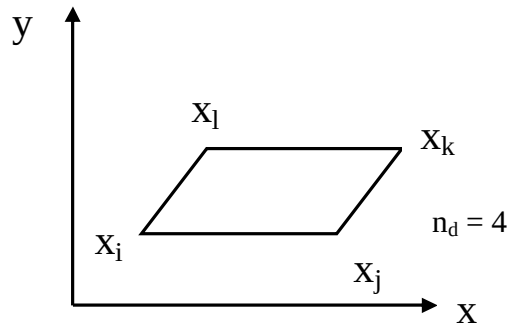
از (1-24) با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} u,_x \\ u,_h \\ u,_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} <P,_x> \\ <P,_h> \\ <P,_z> \end{bmatrix} [P_n]^{-1}\{u_n\} = \begin{bmatrix} <N,_x> \\ <N,_h> \\ <N,_z> \end{bmatrix}\{u_n\} = [B_x]\{u_n\} \qquad (1-26)$$

مثال (1-16) : ساختن تابع N(ξ) برای یک المان چهار گرهی ایزوپارامتریک



$\xi = <\xi \quad \eta>$



X=<x y>

a) انتخاب پایه چند جمله ای

با درجه آزادی $n_d = 4$ و چهار متغیر گرهی از پایه کامل نمی توانیم استفاده کنیم. بهترین انتخاب که تقارن و پیوستگی U را از بین المان ها نیز تأمین می کند، یک پایه دو خطی برحسب x,h می باشد.

$$<P> = <1 \quad x \quad h \quad xh>$$

یادآوری می کنیم که $U<x>=<P>\{a\}$ روی هر ضلع خطی می‌شود. $x=\pm 1, h=\pm 1$

b) تعیین $[P_n]$: با تخمین $<P(x)>$ برای هر چهار گره با مختصات x خواهیم داشت:

$$\{x_n\}=\begin{cases}-1\\1\\1\\-1\end{cases}$$

$$\{h_n\}=\begin{cases}-1\\-1\\1\\1\end{cases}$$

$$[P_n]=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & x & h & xh\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

c) معکوس کردن $[P_n]$: چون ارتوگونال است (حاصلضرب عددی ستون‌های مختلف صفر است) نرم هر ستون 4 است در نتیجه:

$$[P_n]^{-1}=\frac{1}{4}[P_n]^T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

d) عبارت $<N>$:

$$<N>=<N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4>=<P>[P_n]^{-1}$$

$$<N>=<\frac{1-x-h+xh}{4};\frac{1+x-h-xm}{4};\frac{1+x+h+xh}{4};\frac{1-x+h-xh}{4}>$$

$$<N>=\frac{1}{4}(1-x)(1-h);(1+x)(1-h);(1+x)(1+h);(1-x)(1+h)>$$

المان ایزوپارامتریک است $<\bar{N}>\equiv<N>$

$$x(x,h)=<N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4>\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$y(x,h)=<N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4>\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

1-4-2 : **ویژگی های توابع** $\bar{N}, N$

a) هر تابع درون یابی $N_i(x)$ از ضرب عددی پایه چند جمله ای $<P(x)>$ و ستون i ام ماتریس $[P_n]^{-1}$ به دست می آید.

$$N_i(x)=<p(x)>\{C_i\} \qquad (1-27)$$

که در آن

$$[P_n]^{-1}=[\{C_1\} \quad \{C_2\} \ldots \{C_i\} \ \ldots] \qquad (1-28)$$

در نتیجه هر تابع $N_i(x)$ یک ترکیب خطی از توابع $<P(x)>$ می باشد و ضرایب، ترم های ستون $\{C_i\}$ از ماتریس $[P_n]^{-1}$ هستند. در نتیجه می توان از ماتریس $[P_n]^{-1}$ برای ذخیره کردن کل ماتریس N_i استفاده نمود.

b) رابطه (1-24) $<N(x)>=<P(x)>[P_n]^{-1}$ با ضرب کردن دو طرف در $[P_n]$ به صورت

$$<N(x)>[P_n]=<P(x)> \qquad (1-29)$$

در می آید، با استفاده از تعریف (1-20) می توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n_d} N_i(x)\ P_j\ (x_i) \equiv P_j(x) \qquad j=1,2,\ldots,n_d \qquad (1-30)$$

از این رابطه می توان در ساختن توابع N_i استفاده کرد. این رابطه نشان می دهد که عبارات $p_j(\xi)$ بخشی از پایه چند جمله ای استفاده شده در ساخت N_i می باشند.

اگر فرض کنیم که مجموعه ای از توابع N_i به صورت تجربی ساخته شده باشند می توانیم اطمینان حاصل کنیم که تقریب $U(j) = < N > \{u_n\}$ یک چند جمله ای $p(\xi)$ را در بر می گیرد اگر رابطه زیر اقناع شده باشد.

$$\sum_{i=1}^{n_d} N_i(x)\, P(x_i) \equiv P_j(x) \qquad (1-31)$$

در بررسی همگرایی لازم می آید که بدانیم چه تک جمله ای هایی در تابع $u(\xi)$ وجود دارند. مثلا برای کنترل اینکه بدانیم $1, x, h$ در $u(\xi)$ وجود دارد یا نه، کافی است ببینیم:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) = 1 \\ \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) x_i = x \\ \sum_{i=1}^{n_d} N_i(x) h_i = h \end{cases} \qquad (1-32)$$

مثال (1-17) : تابع N در یک چهارضلعی خطی

می‌توان کنترل کرد که توابع N_i مثال (1-16) روابط (1-30) را اقناع می‌کند و مطابق با تک جمله ای های $1, x, h, xh$ می‌باشند.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} N_i(x,h) = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \\ &\sum_{i=1}^{4} N_i(x,h) x_i = -N_1 + N_2 + N_3 - N_4 = x \\ &\sum_{i=1}^{4} N_i(x,h) h_i = -N_1 - N_2 + N_3 + N_4 = h \\ &\sum_{i=1}^{4} N_i(x,h) x_i h_i = N_1 - N_2 + N_3 - N_4 = xh \end{aligned} \qquad (1-33)$$

c) با مشتق گیری از رابطه (1-30) روابط بین مشتقات توابع N_i به دست می آید.

$$\sum_{i=1}^{n_d} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} P_j(x_i) \equiv \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} \qquad (1-34)$$

اینگونه روابط همراه با روابط (1-15)و (1-16) و (1-17) و (1-30) برای کنترل صحت فرم‌های صریح توابع N_i و مشتقات آن مفید هستند.

1-5 : تبدیل عملگرهای مشتق

1-5-1 : مشتقات درجه یک:

برای محاسبه مشتق یک تابع نسبت به ξ بر حسب مشتق آن تابع نسبت به x از مشتق گیری متوالی استفاده می کنیم.

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial h} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial h} & \dfrac{\partial y}{\partial h} & \dfrac{\partial z}{\partial h} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (1-36)$$

معادله بالا را به صورت $\{\partial_x\} = [J]\{\partial_x\}$ می‌نویسیم که [J] ماتریس ژاکوبین تبدیل هندسی است.

عناصر ماتریس ژاکوبین با مشتق گیری از رابطه تبدیل به دست می آید. به همین صورت می توانیم مشتق تابع نسبت به x را بر حسب مشتق آن تابع نسبت به ξ بنویسیم که به صورت

$\{\partial_x\} = [j]\{\partial_x\} \quad (1-37)$ نوشته می شود. در این معادله $[j] = [J]^{-1}$ می باشد.

در برنامه نویسی ها معمولا از [j] استفاده می شود. زیرا لازم است مشتق تابع نسبت به x را از مشتقات تابع نسبت به ξ به دست آوریم.

- عبارت $[j] = [j]^{-1} \quad (1-38)$

فرم صریح معکوس $[J]$ را برای حالات یک، دو و سه بعدی می نویسیم:

* یک بعدی

$$[J] = J_{11} \;\; ; \;\; [j] = [J]^{-1} = \frac{1}{J_{11}} \qquad (1-39)$$

*** دو بعدی**

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; [J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{11} \end{bmatrix} \qquad (1-40)$$

$$\det(J) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$\det(J) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; A \neq 0$$

*** سه بعدی**

$$[J]=\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

$$[J]^{-1}=\frac{1}{\det(J)}\begin{bmatrix} J_{22}J_{33}-J_{32}J_{23} & ; & J_{13}J_{32}-J_{12}J_{33} & ; & J_{12}J_{23}-J_{13}J_{22} \\ J_{31}J_{23}-J_{21}J_{33} & ; & J_{11}J_{33}-J_{13}J_{33} & ; & J_{21}J_{13}-J_{23}J_{11} \\ J_{21}J_{32}-J_{31}J_{22} & ; & J_{12}J_{21}-J_{32}J_{11} & ; & J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21} \end{bmatrix} \qquad (1-41)$$

$$\det(J)=J_{11}(J_{22}J_{33}-J_{32}J_{23})+J_{12}(J_{31}J_{23}-J_{21}J_{33})+J_{13}(J_{21}J_{32}-J_{31}J_{22})$$

- محاسبه عبارت های ماتریس [J]

عبارت های ماتریس [J] با مشتق گیری نسبت به ξ از رابطه زیر که در فصل اول داده شده است به دست می آید.

$$< x \quad y \quad z > = < \bar{N}(x) > \left[\{x_n\} \quad \{y_n\} \quad \{z_n\}\right] \qquad (1-42)$$

$\{z_n\},\{y_n\},\{x_n\}$ مختصات z,y,x گره‌های هندسی یک عنصر هستند. ماتریس ژاکوبین به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[j]=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial h} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} < x \quad y \quad z > = \underbrace{\begin{bmatrix} < \bar{N},x > \\ < \bar{N},h > \\ < \bar{N},z > \end{bmatrix}}_{\bar{n}_e \times 3} \underbrace{\left[\{x_n\} \quad \{y_n\} \quad \{z_n\}\right]}_{\bar{n}_e \times 3} \qquad (1-43)$$

همانطور که دیده می‌شود، ماتریس ژاکوبین حاصلضرب دو ماتریس،یکی مشتقات توابع تبدیل هندسی نسبت به ξ و دیگری مختصات نقاط گره‌های هندسی هر المان می‌باشد.

- تبدیل یک انتگرال

می‌توان انتگرال روی المان واقعی V^e را برحسب انتگرال تابع روی المان مرجع بیان نمود:

$$\int_{v^e} f(x)\ dx\,dy\,dz = \int_{v^r} f(x(x))\ \det(J)\ dx\ dh\ dz \qquad (1-44)$$

این عبارت از آنجا به دست آمده است که به جای $dv = \det(J)dx\ dh\ dz$ را گذاشته‌ایم.

مثال 17-1 : ماتریس ژاکوبین یک عنصر چهار وجهی با چهار گره

مشتقات توابع $\overline{N}$ داده شده در مثال (16-1) را به دست می آوریم:

$$[J] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-h) & (1-h) & (1+h) & -(1+h) \\ -(1-x) & -(1+x) & (1+x) & (1-x) \end{bmatrix}_{2*4} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}_{4*2}$$

$$[J] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ +h(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +h(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \\ +x(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +x(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = A_0 + A_1 x + A_2 h$$

$$A_0 = \frac{1}{8}\left[(y_4 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_2)\right]$$

$$A_1 = \frac{1}{8}\left[(y_3 - y_4)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_4)\right]$$

$$A_2 = \frac{1}{8}\left[(y_4 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_4 - x_1)\right]$$

در صورتی که المان مستطیلی باشد با اضلاع $x_2 - x_1 = 2a$ و $y_4 - y_1 = 2b$

$$x_1 = x_4 \qquad x_2 = x_3$$

$$y_1 = y_2 \qquad y_3 = y_4$$

$$[J] = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & b \end{bmatrix} \quad , \quad \det(J) = ab \equiv \frac{1}{4}\left(area\ \ of\ \ \text{rectangular}\right)$$

و تبدیل انتگرال یک تابع روی المان به صورت زیر نوشته می شود:

$$\int_{v^e} f(x)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(x))\;\; ab\; dx\; dh$$

1-5-3 : مشتقات درجه دوم

مشتق درجه دوم یک تابع نسبت x برحسب مشتقات نسبت به ξ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial h} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} + [T_2] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial h^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial h} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial h \partial z} \end{Bmatrix} \qquad (1-45)$$

این عبارت را به صورت زیر می نویسیم:

$$(1-45-b) \qquad \{\partial^2 x\} = [T_1]\{\partial x\} + [T_2]\{\partial^2 x\}$$

- محاسبه $[T_1]$

ماتریس $[T_1]$ از مشتقات عبارات ماتریس [j] نسبت به ξ که در عبارت (1-27) داده شده است به دست می‌آید. $[T_1]$ در صورتی که [J] ثابت باشد یعنی توابع $\bar{N}(x)$ خطی باشند صفر می‌شود. از آنجایی که به طور کلی عبارت صریح برای [j] نداریم روش زیر جهت محاسبه $[T_1]$ بدون استفاده از [j] داده می‌شود، با مشتق گیری از عبارت (1-36) برحسب ξ خواهیم داشت:

$$\{\partial_x^2\} = [C_1]\{\partial_x\} + [C_2]\{\partial_x^2\} \qquad (1-46)$$

که به صورت زیر می تواند نوشته شود:

$$\{\partial_x^2\} = [C_1][j]\{\partial_x\} + [C_2]\{\partial_x^2\} \qquad (1-46-b)$$

با قرار دادن (1-46-b) در (1-45-b) :

$$\left\{\partial_x^2\right\} = ([T_1] + [T_2][C_1][j])\left\{\partial_x\right\} + [T_2][C_2]\left\{\partial_x^2\right\}$$

دو رابطه زیر به دست می آید:

$$(1-47a) \qquad [T_2][C_2] = 1 \quad or \quad [T_2] = [C_2]^{-1}$$

$$(1-47b) \qquad [T_1] + [T_2][C_1][j] = 0 \quad or \quad [T_1] = -[T_2][C_1][j]$$

ماتریس های $[C_1],[T_2]$ به طور صریح در زیر داده شده اند.

$$[T_2] = \begin{pmatrix} j_{11}{}^2 & j_{12}{}^2 & j_{13}{}^2 & 2j_{11}j_{12} & 2j_{12}j_{13} & 2j_{13}j_{11} \\ j_{21}{}^2 & j_{22}{}^2 & j_{23}{}^2 & 2j_{21}j_{22} & 2j_{22}j_{23} & 2j_{23}j_{21} \\ j_{31}{}^2 & j_{31}{}^2 & j_{33}{}^2 & 2j_{31}j_{32} & 2j_{32}j_{33} & 2j_{33}j_{31} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{13}j_{23} & j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21} & j_{12}j_{23}+j_{13}j_{22} & j_{11}j_{23}+j_{13}j_{21} \\ j_{21}j_{31} & j_{22}j_{32} & j_{23}j_{33} & j_{21}j_{32}+j_{22}j_{31} & j_{22}j_{33}+j_{23}j_{32} & j_{21}j_{33}+j_{23}j_{31} \\ j_{31}j_{11} & j_{32}j_{12} & j_{33}j_{13} & j_{31}j_{12}+j_{32}j_{11} & j_{32}j_{13}+j_{33}j_{12} & j_{31}j_{13}+j_{33}j_{11} \end{pmatrix} = [C_2]^{-1}$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\langle J_{11} \quad J_{12} \quad J_{13}\rangle \\ \frac{\partial}{\partial h}\langle J_{21} \quad J_{22} \quad J_{23}\rangle \\ \frac{\partial}{\partial z}\langle J_{31} \quad J_{32} \quad J_{33}\rangle \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial h}\langle J_{11} \quad J_{12} \quad J_{13}\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle J_{21} \quad J_{22} \quad J_{23}\rangle\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\langle J_{21} \quad J_{22} \quad J_{23}\rangle + \frac{\partial}{\partial h}\langle J_{31} \quad J_{32} \quad J_{33}\rangle\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\langle J_{31} \quad J_{32} \quad J_{33}\rangle + \frac{\partial}{\partial z}\langle J_{11} \quad J_{12} \quad J_{13}\rangle\right) \end{bmatrix}$$

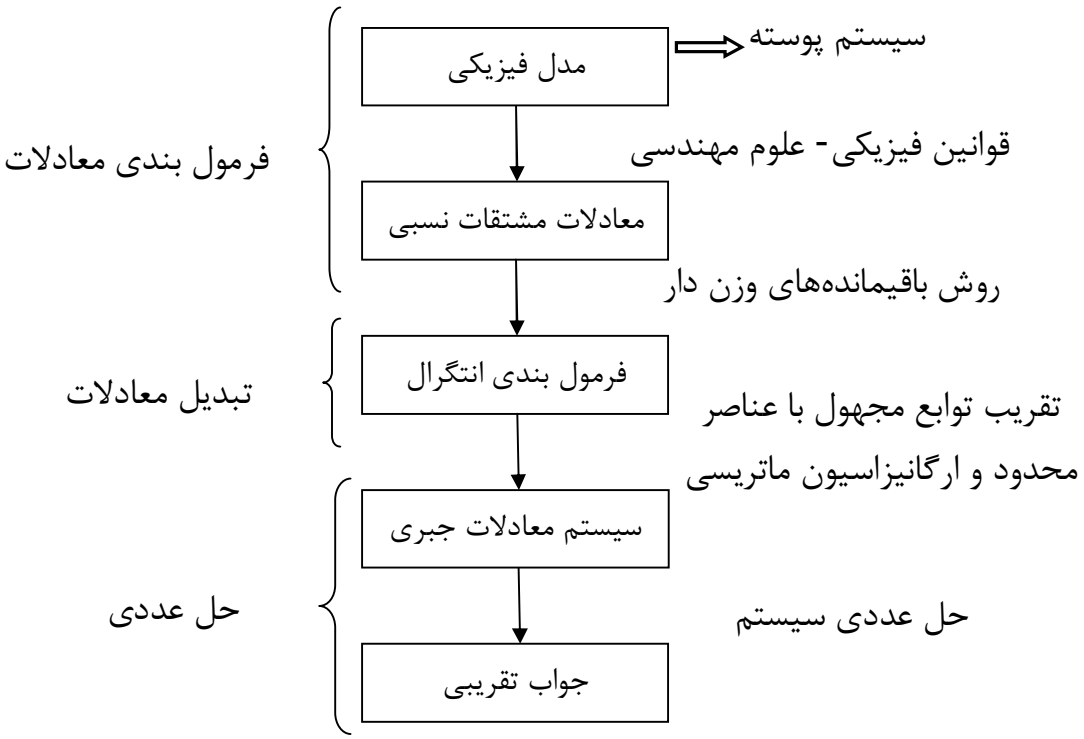
در حالت دو بعدی ماتریس های بالا به صورت زیر نوشته می شوند:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21} \end{bmatrix}$$

$$[C_1]=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}<j_{11} \quad j_{12}> \\ \frac{\partial}{\partial h}<j_{21} \quad j_{22}> \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial h}<j_{11} \quad j_{12}>+\frac{\partial}{\partial x}<j_{21} \quad j_{22}>) \end{bmatrix}$$

فرمول بندی انتگرال

Formulation vareationnelle – Fonmulation inte'grale – Integral Form



1- **طبقه بندی سیستم ها**

سیستم پیوسته (continue) و مجزا شده (discrete)

یک سیستم تابع مختصات مکانی و زمانی است. سیستم پایا (stationaire) اگر تابع t نباشد

یکسری از مشخصات سیستم مثل ابعاد سیستم، مشخصات فیزیکی، شرایط حدی، بارگذاری شناخته شده هسته (d) و بخشی مثل تغییر مکان ها، سرعت و حرارت و تنش ها پارامترهای مجهول هستند. (U)
یک مدل ریاضی روابطی است که بین مشخصات d و U نوشته می شود. درجات آزادی یک سیستم تعداد پارامترهای لازم برای تعریف کامل U در لحظه t مشخص می باشد.
یک سیستم را مجزا شده می نماییم (discret) اگر تعداد درجات آزادی محدود باشد و یک سیستم را پیوسته می نماییم اگر تعداد درجات آزادی نامحدود باشد. رفتار یک سیستم دیسکره(31) با سیستم معادلات جبری عرضه می شود در صورتی که در یک محیط پیوسته معادلات بصورت یک سیستم معادلات مشتقات نسبی می باشد.

<u>مسائل تعادلی، مقادیر ویژه و انتشار امواج</u>

1) در مسائل تعادلی معادلات جبری زیر را برای یک سیستم پایا داریم:

سیستم مجزا شده $[K]\{U\}=\{F\}$

سیستم پیوسته، معادلات مشتقات جزئی زیر می تواند عرضه شود:

در محیط v $\qquad L(u)+f_v=\mathbf{0} \quad \rightarrow$ اپراتور دیفرانسیل

روی مرزهای s از محیط v $\qquad C(u)=f_s \quad \rightarrow$ اپراتور دیفرانسیل

$f_s \rightarrow$ بارگذاریها

2) مسائل مقادیر ویژه یا مقادیر بحرانی: عبارت است از مسأله تعادلی بالا به اضافه محاسبه u مربوط به مقادیر بحرانی یکسری پارامترهای خاص λ را که به مقادیر ویژه معروف هستند.

-سیستم پیوسته $\qquad L_1(u)=l\,L_2(u)$ روی محیط v

$C_1(u)=l\,C_2(u)$ روی مرز s

C_2, C_1, L_2, L_1 اپراتورهای دیفرانسیل هستند که مشخص کننده وضعیت سیستم می‌باشند.

-سیستم مجزا شده $[K]\{u\}=l\,[M]\{u\}$

$[M] \rightarrow$ ماتریس جرم

3) مسائل انتشار یا مقادیر اولیه(برخلاف دو دسته قبل دراین حالت مشتقات نسبت به زمان داریم)

-سیستم پیوسته

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c\frac{\partial u}{\partial t}+L(u)+f_v=\mathbf{0}$$

$$C(u)=f_s$$

با شرایط اولیه $u=u_0$ و $\frac{\partial u}{\partial t}=\dot{u}$ برای $t=t_0$

-سیستم مجزا

$$[M]\{\ddot{U}\}+[c]\{\dot{U}\}+[K]\{\dot{U}\}=\{F\} \quad ; \quad \{U\}=\{U_0\} \quad , \quad \frac{d}{dt}\{U\}=\{\dot{U}_0\}$$

سیستم مجزا شده را خطی می گوییم اگر F,C,M,K از u مستقل باشند.

یک سیستم پیوسته را خطی می گوییم اگر C(u) , L(u) اپراتورهای خطی باشند نسبت به u و مشتقات u و همچنین f_s , f_v و C , m مستقل از u باشند، یعنی:

$$L(u) = [L]\{u\}$$

$$C(u) = [C]\{u\}$$

که [L] و [C] ماتریس های اپراتور دیفرانسیل هستند که مستقل از u می باشد مثلا برای لاپلاسین می توان نوشت:

$$L(u)=\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right].u$$

درجه یک سیستم: تعداد مشتقاتی از مجهول (u) که در معادلات موجود است.

- اپراتور دیفرانسیل L همگن است اگر $L(u=\mathbf{0})=\mathbf{0}$

یک سیستم معادلات مشتقات جزیی همگن است اگر درسیستم $[L]\{u\}+\{f_v\}=0$ $\{f_v\}=0$ باشد.

شرایط حدی روبرو همگن است $[C]\{u\}=\{f_s\}$ اگر $\{f_s\}=0$ باشد.

یک سیستم معادلات دیفرانسیل متقارن یا Self – adjoint)auto – adjoint) است اگر

$$\int_v <u>[L]\{V\}dv = \int_v <v>[L]\{u\}dv$$

u , v به حد کافی مشتق پذیر هستند و شرایط حدی همگن را اقناع می کنند.

$$C(u)=C(v)=\mathbf{0}$$

یک سیستم مشتقات نسبی خطی وقتی مثبت است که:

$$\int_v <u>[L]\{u\}dv \geq 0$$

اگر رابطه بالا برابر صفر باشد فقط برای $u = 0$ به این سیستم «مثبت معین» می گوییم.

انتشار امواج حرارتی یک بعدی

$$q_x = V.A$$

$$\boxed{q_x = -KA\frac{\partial T}{\partial x}}$$

درجه حرارت

ضریب انتقال حرارتی

سطح مقطع

معادله تعادل انرژی

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx = -KA\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(-KA\frac{\partial T}{\partial x})dx$$

ثابت حرارتی

$$q_x dt + \dot{q}Adt = q_{x+dx}.dt + Cr\frac{\partial T}{\partial t}dt$$

جریان حرارتی داخل شده در زمان dt	+	حرارت چشمه حرارتی در dt	=	جریان خروجی حرارتی در dt	+	تغییرات انرژی داخلی در زمان dt

فرم کلی معادله انتشار حرارتی:

$$\frac{\partial}{\partial x}(KA\frac{\partial T}{\partial x}) + \dot{q}A = Cr\frac{\partial T}{\partial t}$$

حالات خاص

اگر $\dot{q}=0$ ⇐ معادلات فوریه

$$\frac{\partial}{\partial x}(KA\frac{\partial T}{\partial x}) = C\,r\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر در حالات پایا باشیم ← معادلات پواسون

$$\frac{\partial}{\partial x}(KA\frac{\partial T}{\partial x}) + \dot{q}A = 0$$

اگر $\dot{q}=0$ باشد و حالت پایا باشیم: معادله لاپلاس

$$\frac{\partial}{\partial x}(KA\frac{\partial T}{\partial x}) = 0$$

و اگر ضریب انتقال حرارتی ثابت باشد

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

این معادلات را می توان برای جریان آب در محیط غیرقابل تراکم استفاده کرد.

مساله پیوسته دوبعدی

مسأله تعادلی

معادله Poisson : سیستم پایا دو بعدی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v = 0 \qquad \text{V روی}$$

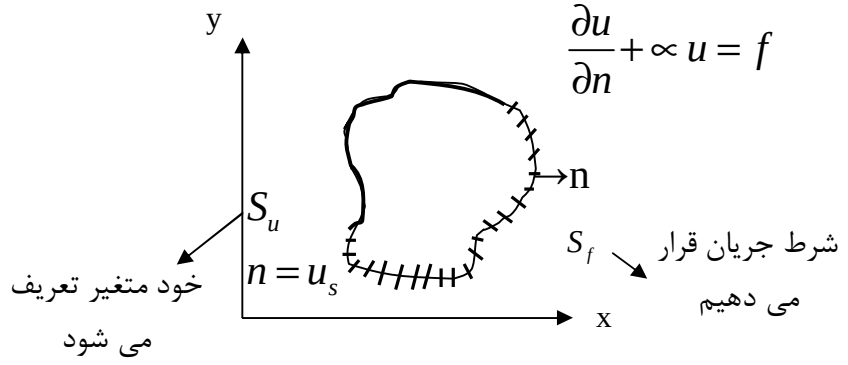
معادله ای است که انتشار امواج حرارتی (u) در محیط پیوسته دو بعدی همگن همان در حالت پایا را بیان می کند.

S_u روی $u = u_s$ – دیریکله Dirichlet

S_f روی $\frac{\partial u}{\partial n} + a\,u = f_s$ - شرایط جریان

$a \neq 0$ - شرط کوشی Cauchy

$a = 0$ - شرط نیومن Neumann



معادلات تعادل در شرایط مرزی به صورت زیر نوشته می شوند.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right].u + f_v = 0 \quad \Rightarrow [L]\{u\} + \{fv\} = 0 \qquad V \text{روي}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} + a\right].u = f_s \quad \Rightarrow [C_f]\{u\} = \{f_s\} \qquad S_f \text{ روي}$$

$$[1].u = u_s \;\Rightarrow\; [C_u]\{u\} = \{f_u\} \qquad S_u \text{ روي}$$

باید تابع u را که سه شرط بالا را اقناع می کند، پیدا کرد.

*دبی حرارتی : شرایط نیومن

*بارگذاری : تنش $s = eE = E\frac{\partial u}{\partial x}$

*همواره شرایط مرزی مسئله باید بدرستی داده شودو هرجا داده نشده بود $f_s = 0$ می باشد(نیومن صفر)

می توان «متقارن بودن» و «مثبت معین» بودن سیستم را امتحان کرد.

$$\int_v u\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]dv = \int_v v\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dv$$

برای شرایط حدی همگن $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{\partial u}{\partial n} + a\,u = \mathbf{0} \\ \frac{\partial v}{\partial n} + a\,v = \mathbf{0}\end{array}\right\}$ S_f روی و $\left.\begin{array}{l} u = \mathbf{0} \\ v = \mathbf{0}\end{array}\right\}$ Su روی

مثبت تعریف شده $\int_v u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dv > 0 \qquad Si \quad a \geq 0$

<u>مسأله مقادیر ویژه</u>

معادله Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+l\,u=0 \qquad \text{روی V}$$

با شرایط حدی از نوع دیریکله یا نیومن،حل این معادلات علاوه بر u پارامتر λ را نیز باید بدهد. با این معادله می توان مد ویژه u و فرکانس ویژه $\sqrt{l}$ ارتعاش یک غشاء الاستیک زیر کشش را به دست آورد. همچنین معادله حاکم بر امواج الکترومسینک و ارتعاش مایعات در اکوستیک می باشد.

<u>مسأله گذرا و انتشار</u> : معادله انتشار امواج حرارتی در محیط دوبعدی حالت گذرا

برای $t > t_0$

روی v $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(t)=\frac{\partial u}{\partial t}$

شرایط حدی روی S_f $\qquad \frac{\partial u}{\partial n}+a\,u=f_s$

روی S_u $\qquad u=u_s$

برای $t = t_0$

روی v $\qquad u=u_0$

2- متد باقیمانده های وزن‌دار Weight residual – Re'sidus ponde're's

2-1 : باقیمانده:

اگر یک سیستم فیزیکی پیوسته ایستا را که رفتار آن توسط یک سیستم معادلات مشتقات نسبی خطی یا غیرخطی از درجه m عرضه شده باشد

به صورت زیر در نظر بگیریم

روی v $\qquad L(u)+f_v=0 \qquad (5)$

روی S $\qquad C(u)=f_s \qquad (6)$

u تابع مختصات x می باشد، توابعی از u جواب های این مسأله تعادلی می باشند که معادلات بالا را اقناع کنند باقیمانده R(u) مقداری است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(u) = L(u) + f_v$$

این مقدار صفر است اگر u جواب واقعی معادلات باشد. R یک بردار است اگر معادلات بالا یک سیستم باشند.

2-2: فرم انتگرالی:

متد با قیمانده‌های وزن دار عبارت است از پیدا کردن توالی از u که فرم انتگرال زیر را صفر کند.

$$W(u) = \int_v <y> \{R(u)\} dv = \int_v <y> \{L(u) + f_v\} dv = 0 \qquad (7)$$

برای تمام توابع وزنی y که متعلق به مجموعه توابع E_y می باشند و u متعلق به مجموعه توابع E_u که جواب های قابل قبول سیستم که شرایط حدی را اقناع کرده و تا درجه m مشتق پذیر باشد.

مثال: فرم انتگرالی معادله Poisson

$$W = \int_v y\ (x,y)(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v) = \mathbf{0} \quad \text{(فرم 1)}$$

که در اینجا u دو بار مشتق پذیر بوده و شرایط حدی را باید اقناع کند.

2-3) تبدیل فرم انتگرالی:

2-3-1) انتگرال گیری جزیی (Par Parties)

این عمل اجازه می دهد که فرم انتگرالی تیپ معادلات v را به صورتی که شرایط اعمال شده بر توابع قابل قبول u کاهش یابد در آوریم.

یادآوری:

- انتگرال یک بعدی

$$\int_{x_1}^{x_2} y\ \frac{du}{dx} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{dx} u\ \ dx + y\ u \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} y\ \frac{d^2u}{dx^2} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{dx}\ \frac{du}{dx} dx + (y\ \frac{du}{dx}) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

- انتگرال دو بعدی:

$$\int_A y\,\frac{\partial u}{\partial x}dxdy = -\int_A \frac{\partial y}{\partial x}u\;\; dxdy + \oint_s y\;u\,dy$$

$$= -\int_A \frac{\partial y}{\partial x}u\;dx\;dy = +\oint_s y\;u\,l\;ds$$

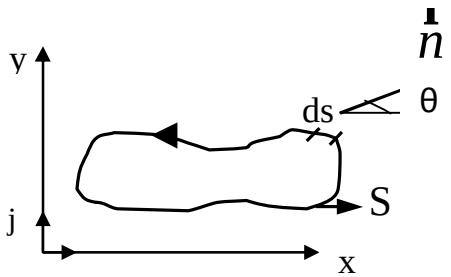
$$\int_A y\;\frac{\partial u}{\partial y}dx\;dy = -\int \frac{\partial y}{\partial y}u\;dx\;dy - \oint_s y\;u\,dx$$

$$= -\int \frac{\partial y}{\partial y}u\;dx\;dy + \oint_s y\;u\,m\,ds$$

$$\left.\begin{array}{l} l = n.i = coq \\ m = \vec{n}.\vec{g} = \sin q \end{array}\right\} \frac{\partial}{\partial n} = l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y}$$

$$dx = -m\,ds$$

$$dy = l\,ds$$



$$\int_A y\;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\;dx\;dy = -\int_A \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy + \oint_s y\;\frac{\partial u}{\partial x}\;l\,ds$$

$$\int_A (y\,\Delta u - u\Delta y\;)dx\;dy = \oint\;(y\;\frac{du}{dn} - u\frac{dy}{dn})ds \qquad ; \qquad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

-سه بعدی

$$\int_v y\;\frac{\partial u}{\partial x}\;dx\;dy\;\;dz = -\int_v \frac{\partial y}{\partial x}u\;dx\;dy\;dz + \oint_s y\;u\,l\,ds$$

2-3-3) فرم انتگرالی ضعیف (weak یا faible)

انتگرال گیری جزء به جزء از معادله v فرم خاصی را به ما می دهد که به فرم ضعیف معروف است، محاسن این فرم به شرح زیر است:

1 : درجه ماکزیمم مشتق U در فرم نهایی کاهش یافته است در نتیجه شرط مشتق پذیری u ضعیف تر است.

2 : بعضی از شرایط حدی که در فرم ضعیف ظاهر می شوند می توانند در فرمول بندی انتگرالی در نظر گرفته شوند و به جای اینکه نقطه توسط U اقناع شوند.

برعکس نسبت به y مشتق y در معادلات ظاهر شده و در نتیجه درجه مشتق پذیری نسبت به y افزایش یافته است. به هر حال راه حل کلی استفاده از فرم ضعیف است اگرچه این راه حل شرط مشتق پذیری معادلات 5 را نیز کاملا اقناع نکند زیرا می توان یک منحنی را با یک چند ضلعی با درجه ای که می خواهیم تقریب کنیم اگرچه این چند ضلعی در نقاط رأس مشتق پذیر نباشد.

<u>مثال</u>

فرم انتگرالی معادله Poisson

در فرم انتگرالی به دست آمده در مثال قبل u باید:

- دو مرتبه مشتق پذیر باشد
- شرایط حدی را اقناع کند
- y هیچ شرطی ندارد

پس از یک بار انتگرال گیری جزء به جزء

$$W=-\int_v\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-y\ f_v\right)dv+\int_{S_f}y\ \frac{\partial u}{\partial n}\ ds+-\int_{S_u}y\ \frac{\partial u}{\partial n}ds=0$$

y باید یک مرتبه مشتق پذیر باشد، از شرایط حدی استفاده می کنیم.

$\frac{\partial u}{\partial n}=f_s-a\,u$ روي S_f روی S_f

برای جایگزینی $\Rightarrow\int_{sf}y\ \frac{\partial u}{\partial n}ds$ توسط $\int_{S_f}y\ (f_s-a\,u)ds$

و روی S_u $y=\mathbf{0}$

خواهیم داشت:

فرم 1 $$W=-\int_v\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-y\ f_v\right)dv+\int_{S_f}y\ (fs-a\,u)ds=0$$

شرایط حدی

$-u=u_s$ روي S_f

$y=0$ روي S_u

<u>پس از دو بار انتگرالسیون</u>

$$W=\int_v((\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2})u+y\ f_v)dv+\oint_s(y\ \frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial y}{\partial n}u)ds=0$$

اگر تابع y طوری انتخاب شود که $\nabla^2 y\ =\mathbf{0}$ باشد فقط می ماند معادله زیر اگر $f_v=0$ باشد

فرم 3 $$W=\oint(y\ \frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial y}{\partial n}u)ds=0$$

این معادله اساس روش B.E.M می باشد. (معادلات انتگرال مرزی)

$\Delta.T$ جدول صفحه 168 کتاب را اینجا به عنوان خلاصه بگریم

بعد از چندین بار انتگرالسیون (S بار) می توان گفت که:

- U باید $m-s$ بار مشتق پذیر باشد
- Ψ باید s بار مشتق پذیر باشد
- u باید شرایط حدی را که فقط مشتقات تا درجه $m-s-1$ را دارد اقناع کند.
- روی حدود بالا $y\ =0$ است.

در نتیجه شرایط حدی که مشتقات با درجه بالا یا مساوی m-s را شامل می شود. در فرمول بندی درنظر گرفته شده اند.

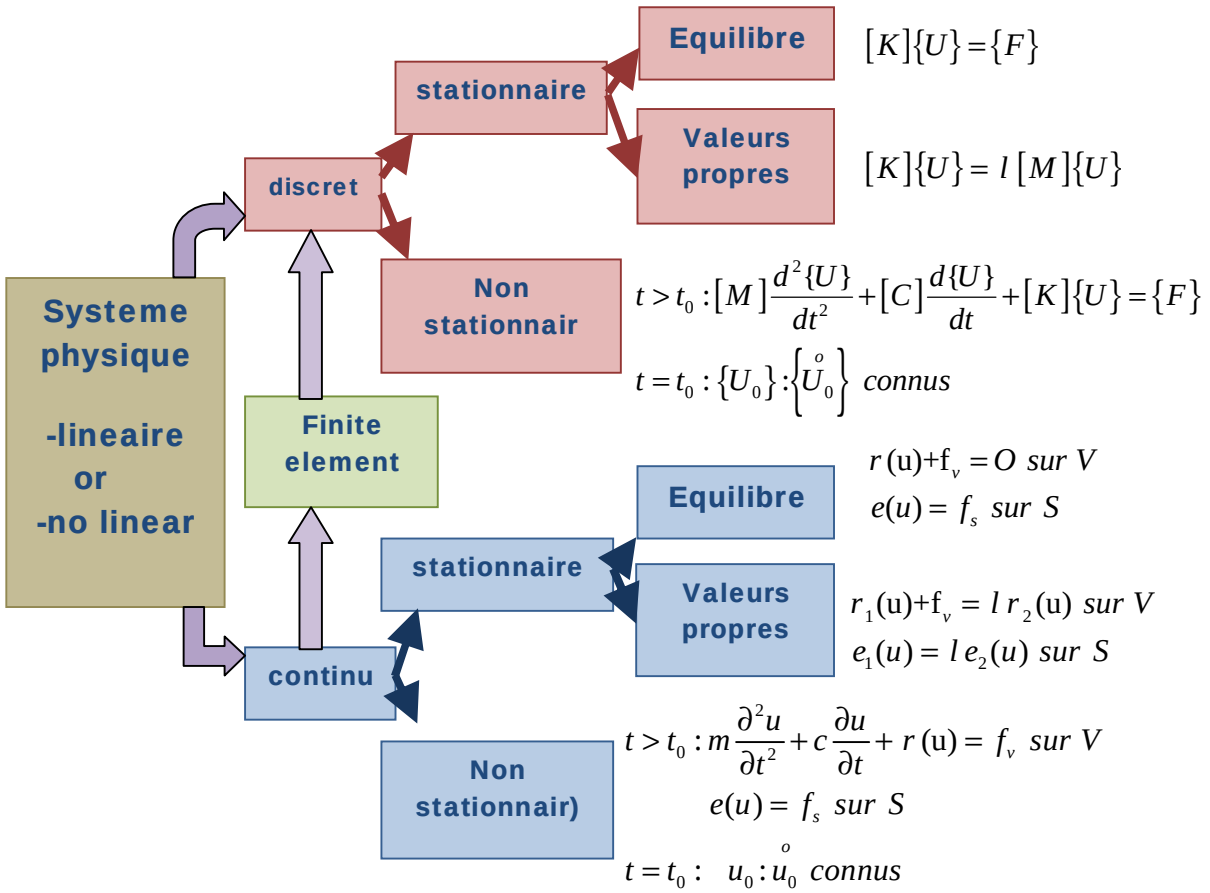


Figure 3.3 Classification des systeme physiques

2-3-3) ساخت فرمهای انتگرال اضافی

در بعضی مواقع سیستم معادلات $L(u)-f_v=0$ از حذف بعضی از پارامترهامثل تنش-گرادیان و...باید بدست آیند.مثل:

$L_e(q)-f_v=0$ معادله تعادل

$L_c(q,u)=0$ قانون

معمولاً L بزرگتراز L_e و L_cازنظردرجه می باشد.درنتیجه بعضی وقت ها مفید است که فرم انتگرال را یکسره از معادلات 11 بدست آوریم که هم درجه کمتری دارد وهم متغیرq بطور explicit موجود است.

مثال: ساخت معادله پواسون

برای معادله انتشارحرارت با ضریب حرارتی 1 دو معادله داریم:

-بقای جریان حرارت q

$$L_e(q)-f_v=\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}-f_v=0$$

f_v :یک چشم ی حرارتی است در واحدحجم

-رابطه بین جریان حرارت ودرجه حرارت

$$L_c(q,u)=0 \quad \begin{cases} q_x+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ q_x+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

U(x,y) درجه حرارت درنقطه x و y می باشد.

معادله ی پواسون از حذف q_x و q_y بدست آمده است. $\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}+f_v=0$

متد باقیمانده وزن دار رامستقیماً به معادلات بالا اعمال می کنیم

$$W_r = \int_v \langle y_u \rangle \{L_e(q) - f\} dv + \int_v \langle y_q \rangle \{L_c(q,u)\} dv = 0$$

چون y_u و y_q مستقل از هم هستند:

$$\int_v \langle y_u \rangle \{L_e(q) - f\} dv = 0$$

$$\int_v \langle y_q \rangle \{L_c(q,u)\} dv = 0$$

فرم Mixte:

$$W_r = \int_v (y_u \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - f_v \right) + y_{q_x}(q_x + \frac{\partial u}{\partial x}) + y_{q_y}(q_y + \frac{\partial u}{\partial y}))\ dv$$

توابع وزنی را ازجان طبیعت توابع q_x, q_y, u به شرح روبرو انتخاب می کنیم:

$$y_u = du \quad , \quad y_{q_x} = dq_x \quad , \quad y_{q_y} = dq_y$$

$$W_r = \int_v (du \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - f_v \right) + dq_x(q_x + \frac{\partial u}{\partial x}) + dq_y(q_y + \frac{\partial u}{\partial y}))\ dv = 0$$

2-4:فونکسیونل

متد باقیمانده وزن داردر بعضی از حالات معادل روشی است که یک فونکسیونل راثابت می سازد. معمولاً در بعضی مواقع مستقیماً، مثلاً انرژی پتانسیل سیستم را نوشته و فرم انتگرالی را پیدا می کنیم که از طریق این استدلال بدست می آید که باید این فونکسیونل ثابت باشد.

-تغییرات درجه ی یک فونکسیونل $\Pi = \Pi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right)$

فونکسیونل بالا انتخاب می شود که ترکیبی از توابع $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots$می باشد.

تغییرات درجه یک Π:

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \ldots$$

du و $d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ تغییرات هرگونه ی u و $\frac{\partial u}{\partial x}$ هستند.

$\frac{\partial \Pi}{\partial u}$ مشتق معمولی است و بقیه مشتقات نیز به همچنین.

اپراتور d خصوصیات زیررادارد:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial(du)}{\partial x}$$
$$d\left(du\right)=0$$
$$d\left(\int_v udv\right)=\int_v du\,dv$$
$$d\left(u+v\right)=du+dv$$
$$d\left(uv\right)=udv+vdu=d\left(vu\right)$$
$$d(cu)=cdu\Rightarrow c=cte$$

مثال:فونکسیونل یک بعدی

$$\Pi\left(u,\frac{du}{dx}\right)=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-uf\right)dx \qquad f=cte$$ در نظر می گیریم.

$$d\Pi=d\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2-uf\right)dx$$
$$d\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left(d\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)-duf\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{d(du)}{dx}\frac{du}{dx}-duf\right)dx$$
$$d^2\Pi=d(d\Pi)=\int_{x_1}^{x_2}\left(d\left(\frac{du}{dx}\right)\right)^2dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{d(du)}{dx}\right)^2dx$$

زیرا $d\left(du\right)=0$ است.(اگر $y=d\left(u\right)$ حتماًفرم گلرکین بدست می آید.)

2-4-2) فونکسیونل همراه یک فرم انتگرال

می توان برای معادلات 5 فونکسیونلی مثل $\Pi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},...\right)$ ساخت باشرط زیر

$$d\Pi\equiv W=0 \qquad (15)a$$

این فرم W فرم خاصی است که به نام گلرکین معروف است.باانتخاب $y=d\left(u\right)$ در معادله 7 واستفاده ازانتگرال گیری جزءبه جز

$$W=\int_v\langle du\rangle\{L(u)+f_v\}dv=0 \qquad (15)b$$

این مطلب را می توان به شروط زیربکاربرد:(این شروط کافی هستندولیکن لازم نیستند.)

- c, L خطی هستندوتمام مشتقات L زوج هستند.
- f_s, f_v مستقل از u می باشند.

مثال: فونکسیونل پواسون

$$L(u)+f_v=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f_v=0$$

باشرط بالا: فونکسیونل موجوداست.فرم بدست آمده درمثال 5 (فرم انتگرال 1)را بصورت زیرداریم:

$$W=\int_v\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-y\ f_v\right)dv+\int_{s_f} y\ \left(a\,u-f_s\right)ds=0$$

$$W=\int_v\left(\frac{\partial(du)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(du)}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-du f_v\right)dv+\int_{s_f} du\left(a\,u-f_s\right)ds=0$$

اگر فونکسیونل Π را بصورت زیرتعریف کنیم:

$$\Pi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\int_v\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-uf_v\right)dv+\int_{s_f}\left(\frac{1}{2}a\,u^2-uf_s\right)$$

می توان دید که $d\Pi\equiv W=0$ میباشد.

می توان تعبیرکردکه رابطه 15 شرط ثابت بودن فونکسیونل Π میباشد.درنتیجه می توان گفت جواب U که Wراصفر می کند فونکسیونل Π را ثابت نگه می دارد.این حداکثریاحداقل است درصورتیکه تغییرات دوم فونکسیونل $\delta\Pi^2$ مثبت یا منفی باشد.

$$d^2\Pi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots\right)=\frac{\partial^2\Pi}{\partial u^2}du\,du+\frac{\partial^2\Pi}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\ldots\ldots$$

تعاریف:

خطی بودن فونکسیونل: Π نسبت به U خطی است $\left(\Pi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\int_v\left(a_1u+a_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)dv\right)$

کوادراتیک بودن فونکسیونل: Π نسبت به U ازدرجه دوم است.

مخلوطی از خطی و کوادراتیک رانیز کوادراتیک می گویند.

فونکسیونل کاملاً کوادراتیک:

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_v\left\langle u\quad\frac{\partial u}{\partial x}\quad\ldots\right\rangle[D]\begin{Bmatrix}u\\ \frac{\partial u}{\partial x}\\ \vdots\end{Bmatrix}dv$$

ماتریس [D] یک ماتریس متقارن است که به U بستگی ندارد.

تغییرات اول و تغییرات دوم آن به صورت زیر نوشته می شود:

$$d\Pi = \int_v \left\langle du \quad \frac{\partial(du)}{\partial x} \quad \ldots \right\rangle [D] \begin{Bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix} dv$$

$$d^2\Pi = \int_v \left\langle du \quad \frac{\partial(du)}{\partial x} \quad \ldots \right\rangle [D] \begin{Bmatrix} du \\ \frac{\partial(du)}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix} dv$$

فونکسیونل Π مثبت تعریف شده است.اگر ماتریس D مثبت تعریف شده باشد،یعنی اینکه تمام مقادیرویژه مثبت باشد، در نتیجه $d^2\Pi$ مثبت است.

مثال:فرم ماتریسی معادله پواسون

فونکسیونل مثال قبل بصورت زیر نوشته می شوود:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_v \left(\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} - 2uf_v \right) dv + \int_{s_f} \left(\frac{a u^2}{2} - uf_s) \right) ds$$

$$d^2\Pi = dW = \int_v \left(\left\langle \frac{\partial(du)}{\partial x} \quad \frac{\partial(du)}{\partial y} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(du)}{\partial x} \\ \frac{\partial(du)}{\partial y} \end{Bmatrix} \right) dv + \int_{s_f} \left(a\,(du)^2 \right) ds$$

ماتریس D مثبت فرض شده است، پس ماتریس مثبت تعریف شده است و $d^2\Pi \geq 0$

3-4-2)اصل پایایی principe de stationnarite

$$L(u) + f_v = 0 \qquad over\ V \qquad 21-a$$

$$C_f(u) = f_s \qquad over\ s_f \qquad 21-b$$

$$C_u(u) = f_u \qquad over\ s_u \qquad 21-c$$

فرم انتگرال بدست آمده از متدباقیمانده های وزن دار:

$$W(u)=\int_v \langle y \rangle \{L(u)+f_v\}dv=0 \qquad \leftarrow (\ for\ \ \forall\ y\ )$$

$$C_f(u)=f_s \qquad over\ s_f$$

$$C_u(u)=f_u \qquad over\ \ s_u$$

با انتخاب $y=du$ وبااستفاده از انتگرال جزءبه جزء برای سیستمهای conservative می توان فونکسیونل Π طوری ساخت که جواب U موردنظراین فونکسیونل را ثابت نگه دارد

$$d\Pi(u)=W(u)=0$$

$$C_u(u)=f_u \qquad over\ S_u$$

اصل پایایی می گوید:در میان توابع U قابل قبول،آن تابعی که معادلات 21-a ,21-b را اقناع کند،فونکسیونل را ثابت نگه می دارد.

2-4-4-ضریب لاگرانژ و فونکسیونل اضافی

با استفاده ازضریب لاگرانژمی توان فونکسیونل Π^* را طوری ساخت که شرایط ثابت بودن فونکسیونل، فرم انتگرالی جدیدی که مشخصات خاصی رادرنظرمی گیرد بدست دهد. بااین روش می توانیم به مشخصات زیر دست یابیم:

-معرفی متغیرهای جدید فیزیکی به عنوان مجهول

-شرط مشتق پذیری خفیفی

مثال-تعریف ضریب لاگرانژ:

اکسترمم تابع روبرو $\Pi_1(u,v)=u^2+v^2$ به طریق زیر بدست می آید:

$$d\Pi_1=2udu+2vdv=0 \qquad \forall\ du,dv$$

$$u=v=0 \qquad \Pi_1(0,0)=0$$

فرض کنیم که مینیمم Π_1 راباشرط زیر میخواهیم پیداکنیم:

$$g(u,v)=u-v+2=0$$

روش اول استفاده از معادله بالا در Π_1 و حذف v:

$$\Pi(u) = 2u^2 + 4u + 4$$
$$d\Pi = 4(u+1)du = 0$$
$$u = -1 \;\; , \;\; v = 1 \;\; \Rightarrow \Pi(1,-1) = 2$$

متد ضریب لاگرانژ عبارتست از:

$$\Pi^*(u,v,l) = \Pi_1(u,v) + l\,g(u,v) = u^2 + v^2 + l\,(u - v + 2)$$
$$d\Pi^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial u}du + \frac{\partial \Pi^*}{\partial v}dv + \frac{\partial \Pi^*}{\partial l}dl = 0 \qquad \forall\, du, dv, dl$$
$$d\Pi^* = (2u + l)du + (2v - l)dv + (u - v + 2)dl = 0$$
$$2u + l = 0 \qquad u = -1$$
$$2v - l = 0 \qquad v = 1$$
$$u - v + 2 \qquad l = 2$$

با عمومیت دادن نتایج مثال بالامی توان گفت که پیداکردن U ی که $\Pi_1(u,q)$ فونکسیونل راثابت نگه می داردبااقناع روابط زیرجواب مساله هستند.

$$g_1(u,q) = 0$$
$$g_2(u,q) = 0 \qquad \text{روي } v \qquad (25)$$
$$\vdots$$
$$g_m(u,q) = 0$$

یک متد این است که ازمعادلات(25) q را حذف کرده و فونکسیونل Π رابرحسب U بدست آورده و یا با بکارگیری روش ضریب لاگرانژ m ضریب لاگرانژ $l_1, l_2, \mathbf{L}, l_n$

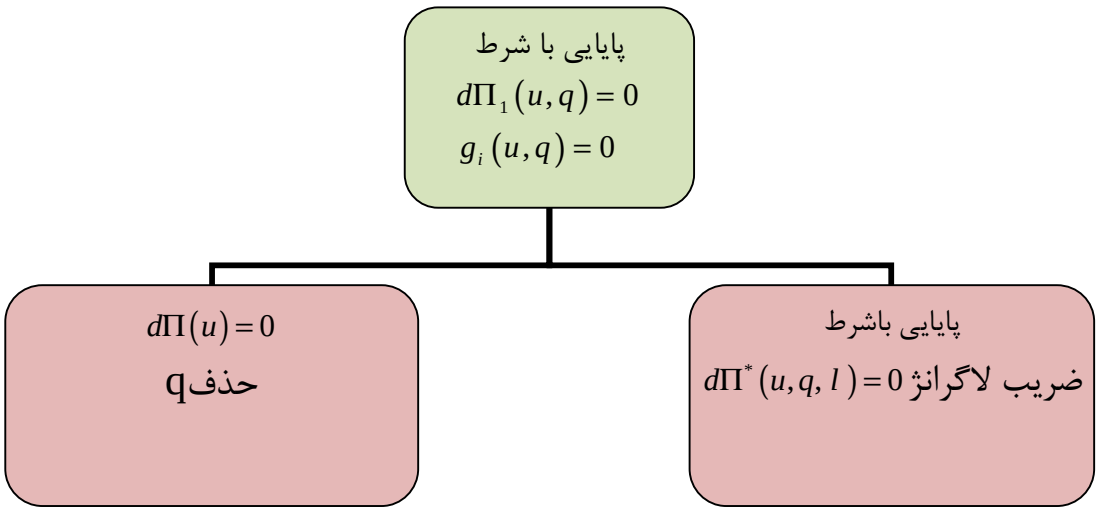
را معرفی کرده فونکسیونل عمومی راثابت نگه می داریم.

$$\Pi^*(u,q,l) = \Pi_1(u,q) + \int_v \left(l_1 g_1(u,q) + l_2 g_2(u,q) + \mathbf{L} + l_m g_m(u,q) \right) dv$$

شرط ثبوت

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial l_i} = g_i = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

مجموعه ی مجهولات u وq وλ بجای uوq . Π^* مثبت معین نیست حتی اگر Π مثبت معین باشد.معمولاًضرایب لاگرانژمفهوم فیزیکی دارندودبی یاجریان یا تنش هستند.



مثال روی poisson: فونکسیونل زیر را در نظرمی گیریم:

$$\Pi(u)=\int_v\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-uf_v\right)dv+\int_{s_f}\left(\frac{1}{2}au^2-uf_s\right)ds$$

و یامی توان با استفاده از q_x و q_y نوشت:

$$\Pi_1(u,q_x,q_y)=\int_v\left(\frac{1}{2}\left(q_x{}^2+q_y{}^2\right)-uf_v\right)dv+\int_{s_f}\left(\frac{1}{2}au^2-uf_s\right)ds$$

با دوشرط $q_y+\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $q_x+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ می توان به فونکسیونل Π رسید.

یا با استفاده از ضریب لاگرانژ:

$$\Pi^*(u,q_x,q_y,l_1,l_2)=\int_v\left(\frac{1}{2}\left(q_x{}^2+q_y{}^2\right)-uf_v+l_1\left(q_x+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+l_2\left(q_y+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)dv+\int_{s_f}\left(\frac{1}{2}au^2-uf_s\right)ds$$

هر ترم: $\partial\Pi^*=\frac{\partial\Pi^*}{\partial u}du+\frac{\partial\Pi^*}{\partial q_x}dq_x+\frac{\partial\Pi^*}{\partial q_y}dq_y+\frac{\partial\Pi^*}{\partial l_1}dl_1+\frac{\partial\Pi^*}{\partial l_2}dl_2=0$

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial u}du=\int_v\left(-f_v du+l_1\frac{\partial du}{\partial x}+l_2\frac{\partial du}{\partial y}\right)dv+\int_{s_f}(au-f_s)du\,ds=0$$

پس ازانتگرال گیری جزء به جزء:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial u} = -\int_v \left(\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial l_2}{\partial y} + f_v \right) dv + \int_{s_f} (a u - f_s + l_1 m + l_2 l) ds = 0$$

با فرض $du = 0$ روی S_u شرایط دیگر ثبوت بدست می آید:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_x} = \int_v (q_x + l_1) dv = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial q_y} = \int_v (q_y + l_2) dv = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial l_1} = \int_v \left(q_x + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dv = 0$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial l_2} = \int_v \left(q_y + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dv = 0$$

2-5)مجزاسازی فرم انتگرال

فرم انتگرال زیر از معادلات مشتقات جزیی بدست آمده است.

$$W = \int_v y \,.R(u) dv = \int_v y \,.(L(u) + f_v) dv = 0$$

برای بدست آوردن یک جواب تقریبی در دومرحله مجزاسازی انجام می شود.

-انتخاب تابع تقریب مجهولات $u = u(a_1, a_2, ..., a_n)$ که می تواند گرهی و یا غیر گرهی باشد.(روش اجزای محدود)

برای $\forall\ y \quad \rightarrow \quad W = \int y \,.\left(L\left(u(a_1, a_2, ..., a_n)\right) + f_v\right) dv = 0$

-انتخاب یک مجموعه از n تابع وزنی مستقل $y_1, y_2, ..., y_n$

مسلم است که تعداد توابع وزنی معادل پارامترهای تقریب مجهولات می باشد.این انتخاب

تیپ y_i ها به راه حلهای مختلف می انجامد (گالرکین)

$$W_1 = \int_v y_1 \left(L\left(u(a_1, a_2, ..., a_n)\right) + f_v\right) dv = 0$$

$$W_2 = \int_v y_2 \left(L\left(u(a_1, a_2, ..., a_n)\right) + f_v\right) dv = 0$$

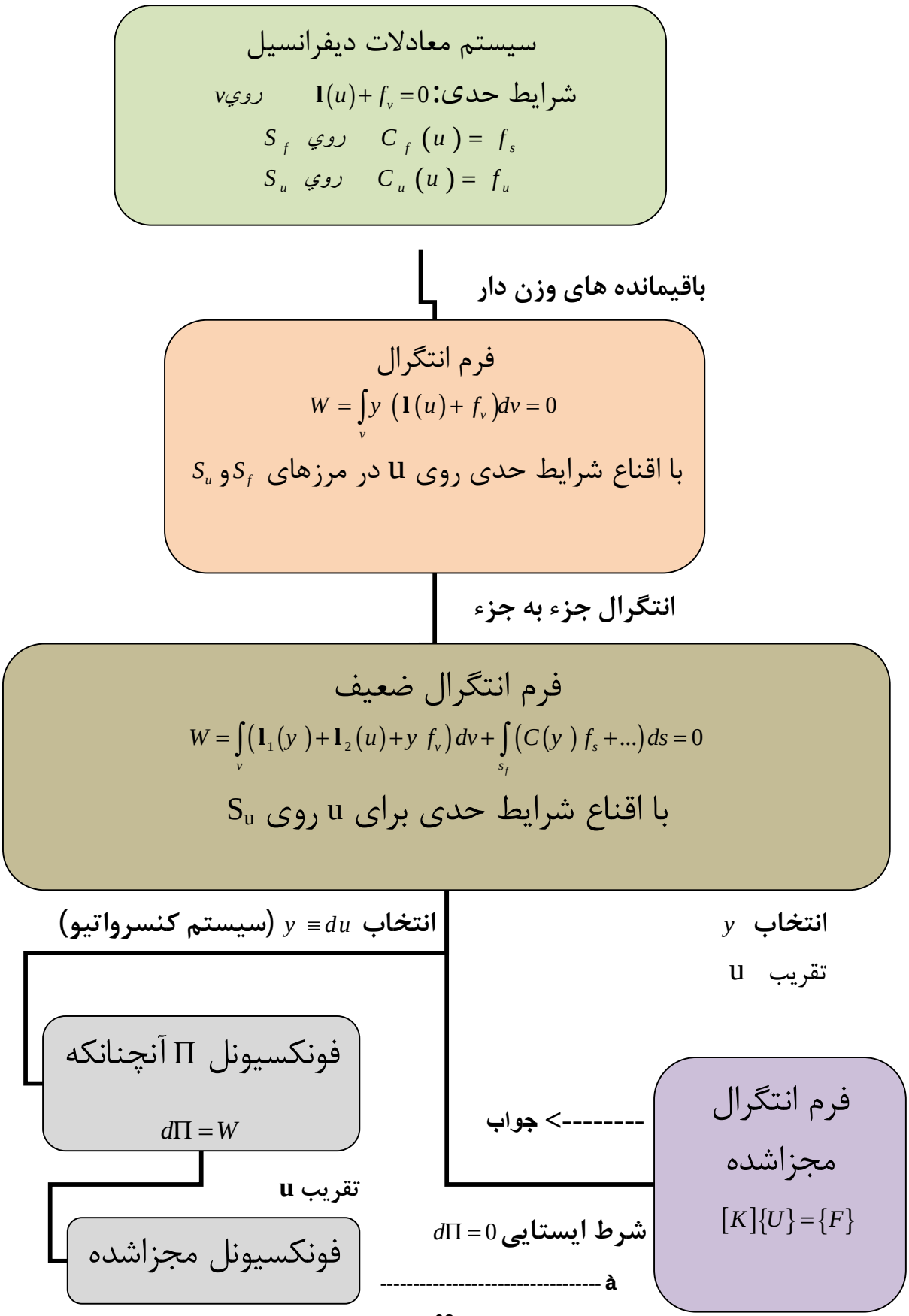
$$\vdots$$

$$W_n = \int_v y_n \left(L\left(u(a_1, a_2, ..., a_n)\right) + f_v\right) dv = 0$$

در مجموع این دو مرحله به سیستم معادلات جبری زیر می رسیم:

$$[K]\{u\}=\{F\}$$

در جدول زیر خلاصه ای از روشهای توضیح داده شده عرضه گردیده است.


سیستم معادلات دیفرانسیل
شرایط حدی: $\mathbf{l}(u)+f_v=0$ روي v
$C_f(u)=f_s$ روي S_f
$C_u(u)=f_u$ روي S_u
باقیمانده های وزن دار
فرم انتگرال
$W=\int_v y\,(\mathbf{l}(u)+f_v)dv=0$
با اقناع شرایط حدی روی u در مرزهای S_f و S_u
انتگرال جزء به جزء
فرم انتگرال ضعیف
$W=\int_v(\mathbf{l}_1(y)+\mathbf{l}_2(u)+y\,f_v)dv+\int_{s_f}(C(y)\,f_s+...)ds=0$
با اقناع شرایط حدی برای u روی S_u
انتخاب $y\equiv du$ (سیستم کنسرواتیو)
انتخاب y
تقریب u
فونکسیونل Π آنچنانکه
$d\Pi=W$
جواب <--------
فرم انتگرال مجزاشده
$[K]\{U\}=\{F\}$
تقریب u
شرط ایستایی $d\Pi=0$
فونکسیونل مجزاشده
à

2-5-2)تقریب توابع U

$$e(x) = U(x) - U_{ex}(x) = \text{approximate - exact}$$

به سه روش زیر انجام می گیرد:

1)تقریب غیرگرهی روی محیط V (توابع پایه)

$$U = U\left(x, a_1, a_2, ..., a_n\right) = \left\langle P_1 \;\; P_2 \;\; ... \;\; P_n \right\rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \qquad (33)$$

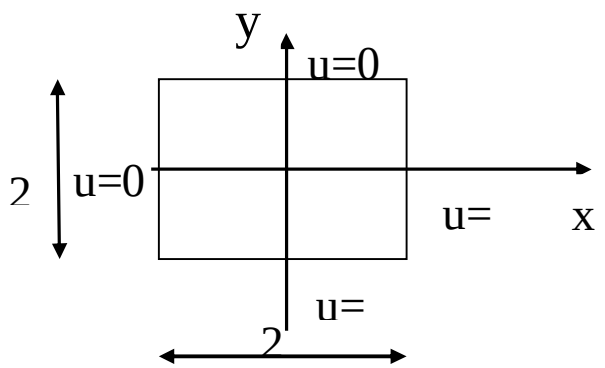
2) تقریب گرهی روی محیط V (توابع درون یابی)

$$U = U\left(x, u_1, u_2, ..., u_n\right) = \left\langle N_1 \;\; N_2 \;\; ... \;\; N_n \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (34)$$

3)تقریب توسط عناصر محدود: تقریب گرهی برای زیرمجموعه ها که عنصر نامیده میشود و بعلاوه آن شرط پیوستگی بین المانها

مثال: تقریب غیرگرهی روی یک مربع

معادله poisson



روی مربع:

$$L(u) + f_v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = 0$$

$$u = 0 \quad \text{روي} \quad S \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

یک تقریب که شرایط حدّی وتقارن را اقناع می کند:

$$u = \langle P_1 \quad P_2 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \langle P \rangle \{a\}$$

با:

$$P_1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$
$$P_2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2) = P_1 (x^2 + y^2)$$

در نتیجه:

$$L(u) = L(\langle P \rangle \{a\}) = L(P_1) a_1 + L(P_2) a_2$$

با:

$$L(P_1) = 2(x^2 + y^2 - 2)$$
$$L(P_2) = 2(6x^2 - 1)(y^2 - 1) + 2(6y^2 - 1)(x^2 - 1) + 2(x^4 - x^2) + 2(y^4 - y^2)$$

3-5-2)انتخاب توابع وزنی ψ

بنابر انتخاب ψ معادلات 31 به متدهای مختلفی به شرح زیر می انجامد:

1.متد هم قرارگیری نقاط collocation par point

$y = d(x_i)$ گسترش دیراک در نقطه x_i

2.متد هم قرارگیری زیرمجموعه‌ها collocation par sousdenation $y = cte$

3.متد گلرکین (از همه بیشتر استفاده می شود)

$$y = \langle N \rangle \ \ or \ \ y = \langle P \rangle \ \ or \ \ y = du$$

4.متد حداقل مربعات $y = L(\langle N \rangle) \ \ or \ \ y = L(\langle P \rangle) \ \ or \ \ y = d(L(u))$

متد هم قرارگیری نقاط

تابع $y_i(x)$ گسترش دیراک $d(x_i)$ در نقطه x_i که نقطه ی هم قرارگیری نامیده می شود، می باشد به فرم انتگرال v نوشته می شود:

$$W = \int_v d(x_i) R(x,u)\, dv = R(x_i,u) = 0 \qquad (35)$$

معادلات 31 به صورت زیرنوشته می شوند:

$$W_i(a) = \left(\mathbf{l}\left(u(x,a_1,a_2,\ldots,a_n)\right) + f_v\right)_{x=x_i} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

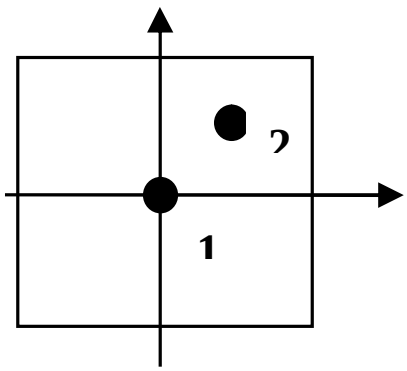
بااستفاده از تقریب33 می توان نوشت:

$$W_i(a) = \left(\mathbf{l}\left(\langle p\rangle\{a\}\right) + f_v\right)_{x=x_i} = \left(\langle \mathbf{l}(p)\rangle\{a\} + f_v\right)_{x=x_i} = 0 \qquad (36)$$

دقت جواب بستگی به انتخاب x_i دارد. معمولاً باید تقارن مساله را اقناع کرد. تعداد نقاط هم قرارگیری برابر است با تعداد پارامترهای a_i.این روش به علت مشکل بودن کم مورداستفاده قرار میگیرد ولیکن حسن آن این است که انتگرال گیری روی حجم حذف می شود که برای مسایل غیرخطی مفید است.

مثال:حل معادله پواسون به روش "هم قرارگیری نقاط"

نقاط هم قرارگیری به صورت $x_1 = (0,0),\ x_2 = (0.5,0.5)$ تعریف می شوند



تابع وزنی:

$$y_1 = d(x_1)$$
$$y_2 = d(x_2)$$

روابط 36 به صورت زیرنوشته می شوند:

$$W_1 = \langle L(p_1) \quad L(p_2) \rangle_{x=x_1} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + f(x_1) = 0$$

$$W_2 = \langle L(p_1) \quad L(p_2) \rangle_{x=x_2} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + f(x_2) = 0$$

با استفاده از جواب مثال قبل

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= -4a_1 + 4a_2 + f = 0 \\ W_2 &= -3a_1 - \frac{9}{4}a_2 + f = 0 \end{aligned}\right\rangle \quad \begin{cases} a_1 = 0.2976\, f \\ a_2 = 0.0476\, f \end{cases}$$

مقدار u در مرکز برابراست با:

$$u(x_1) = \langle P_1(x_1) \quad P_2(x_1) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = a_1$$

$$u_c = u(x_1) = 0.2976\, f$$

مقداردقیق u بااستفاده ازراه حل توسط یکسری ، 14 جمله $u_c = 0.2947\, f$ می باشد.

اگر جواب رابایک پارامتر $u = p_1(x) a_1$ بدست می آوردیم:

-نقطه هم قرارگیری x_1: $u_c = 0.25\, f$

-نقطه هم قرارگیری x_2: $u_c = 0.333\, f$ می شدند.

متد هم قرارگیری زیر قلمرو:

n زیرقلمرو V^i درنظرگرفته و ψ_i رابصورت زیر اختیار می کنیم:

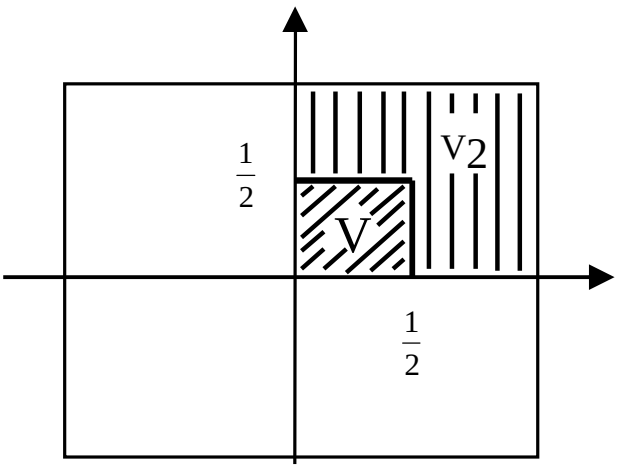
$$y_i = \begin{cases} 1 & if \;\; x \in V^i \\ 0 & if \;\; x \notin V^i \end{cases} \qquad (37)$$

روابط 31 به صورت زیرمی شوند:

$$W_i(a) = \int_{V^i} \left(\langle L(P) \rangle \{a\} + f_v \right) dv = 0 \qquad (38)$$

دقت جواب به انتخاب زیر قلمرو بستگی دارد. شرط تقارن باید احترام گذاشته شود. انتخاب زیرقلمرو مشکل است لذا این متد زیاد استفاده نمی شود. ازآنجایی که این متد انتگرال گیری روی حجم دارد بهتراست گالرکین استفاده شود.

مثال: حل poisson توسط متد هم قرارگیری زیر قلمرو



معادله 38 می شود:

$$W_1 = \int_{V^1} \langle L(P_1) \quad L(P_2) \rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{V^1} f\, dv = -0.9167 a_1 + 0.3875 a_2 + 0.25 f = 0$$

$$W_2 = \int_{V^2} \langle L(P_1) \quad L(P_2) \rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{V^2} f\, dv = -1.75 a_1 - 3.587 a_2 + 0.75 f = 0$$

$$\begin{cases} a_1 = 0.2994\, f \\ a_2 = 0.0630\, f \end{cases} \qquad value\, in\, center \Rightarrow \quad u_c = a_1 = 0.2994\, f$$

متد گالرکین

تابع ψ مجموعه تغییرات δu تابع u خواهد بود.

$$y = du = \langle P \rangle \{da\} \qquad for \quad \forall \{da\}$$

$\{\delta a\}$تغییرات پارامترتقریب می باشد.

معادله 31 می دهد:

$$W=\int_v du\left(L(u)+f_v\right)dv=0$$

$$W=\langle da\rangle\int_v\{P\}\left(L\left(\langle P\rangle\{a\}\right)+f_v\right)dv=0$$

از آنجایی که w باید برای تمام $\{da\}$ ها صفر باشد، نتیجه می گیریم:

$$W_1(a)=\int_v P_1\left(\langle L(P)\rangle\{a\}+f_v\right)dv=0$$

$$\vdots$$

$$W_n(a)=\int_v P_n\left(\langle L(P)\rangle\{a\}+f_v\right)dv=0$$

این سیستم متقارن بوده اگراپراتور L اتوادجوینت باشد.

مثال:حل معادله پواسون توسط متد گلرکین بدون انتگرال جزء به جزء

$$\left.\begin{aligned}W_1&=\int_v\langle P_1.L(P_1)\quad P_1.L(P_2)\rangle dv\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\end{Bmatrix}+\int_v P_1 f\,dv=0\\W_2&=\int_v\langle P_2.L(P_1)\quad P_2.L(P_2)\rangle dv\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\end{Bmatrix}+\int_v P_2 f\,dv=0\end{aligned}\right\}\qquad(42)$$

با استفاده از تقارن مساله

$$\left.\begin{aligned}5.689\,a_1+1.9505\,a_2&=1.7778\,f\\1.9505\,a_1+2.3839\,a_2&=0.7111\,f\end{aligned}\right\}\Rightarrow a_1=0.2922\,f\quad a_2=0.0592\,f$$

$$u_c=0.2922\,f\quad,\qquad exact\,value: u_c=0.2947\,f$$

با اختیار یک پارامتر تقریب $u=P_1(x,y)a_1$ خواهیم داشت: $u_c=0.3125\,f$

با اختیار سه پارامتر تقریب خواهیم داشت: $u_c=0.2949\,f$

بااستفاده از انتگراسیون جزء به جزء می توان معادلات 42 را بصورت زیر نوشت:

$$\left.\begin{aligned}W_1(a)&=\int_v L_1(P_1)\left(\langle L_2(P)\rangle\{a\}\right)dv-\int_v P_1 f_v\,dv-\int_{s_f}P_1 f_s\,ds=0\\&\vdots\\W_n(a)&=\int_v L_1(P_n)\left(\langle L_2(P)\rangle\{a\}\right)dv-\int_v P_n f_v\,dv-\int_{s_f}P_n f_s\,ds=0\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

دراین حالت از شرایط با محدودیت کمتر می توان استفاده کرد. از تابع <P> ساده ترمی توان استفاده کرد.این فرمولها(43) فرم گالرکین معادلات است که از همه بیشتر استفاده می شود.

مثال: حل معادله پواسون توسط متد گلرکین با انتگرال جزء به جزء

با استفاده از فرم W بدست آمده درمثال های قبل و درنظر گرفتن:

$$\mathbf{l}_1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle; \quad \mathbf{l}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

معادله 43 با($f_s = a = 0$)می شود:

$$W_1 = \int_v \left\langle \frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial y} \;;\; \frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial y} \right\rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - \int_v P_1 f \, dv = 0$$

$$W_2 = \int_v \left\langle \frac{\partial P_2}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial y} \;;\; \frac{\partial P_2}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial y} \right\rangle dv \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - \int_v P_2 f \, dv = 0$$

این معادلات و نتایج آن با مثال قبلی یکسان است.

متد حداقل مربعات:

ایـن متـد عبـارت اسـت ازحـداقل کـردن عبـارت $\Pi_m = \int_v R.R\,dv$ (44) نسـبت بـه $a_1, a_2, ..., a_n$. R باقیمانده است.

$$R = L(u) + f_v = \langle L(P) \rangle \{a\} + f_v \qquad (45)$$

شرایط ایستایی برای معادله 44 به شکل زیراست:

$$\left.\begin{aligned} & W = d\Pi_m(a_1, a_2, ..., a_n) = 0 \\ & W_1(a) = \int_v L(P_1)\left(\langle L(P)\rangle\{a\} + f_v\right) dv = 0 \\ & \vdots \\ & W_n(a) = \int_v L(P_n)\left(\langle L(P)\rangle\{a\} + f_v\right) dv = 0 \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

با این متد از انتگرال گیری جزء به جزء نمی تـوان اسـتفاده کـرد و در نتیجـه شـرایط سـختری بـرای تقریـب موجود است. لیکن همواره به سیستم معادلات متقارن و مثبت معین منتهی می شود.

مجزاسازی یک فونکسیونل(متد ریتز)

متد ریتز عبارت است از مجزاسازی یک تابع نما Π با استفاده از تقریب U ازنوع غیر گرهی(معادلات 33) و سپس نوشتن شرایط پایایی نسبت به پارامترهای تقریب:

$$\Pi(u)=\Pi\left(u(a_1,a_2,...,a_n)\right)$$
$$d\Pi(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}d\,a_1+\frac{\partial\Pi}{\partial a_2}d\,a_2,...,\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}d\,a_n=0$$

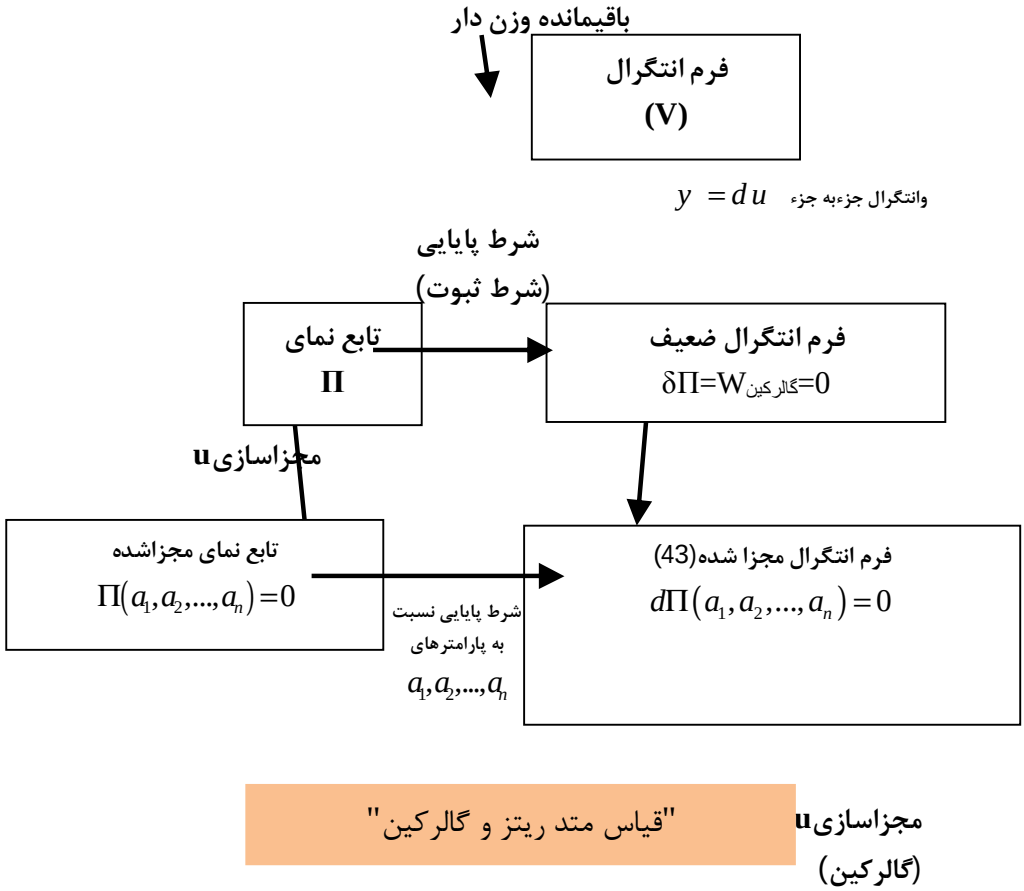
ازاین جا n معادله زیرحاصل می شود:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_1}=0$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_2}=0 \qquad (47)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_n}=0$$

اگر فونکسیونل موجود باشد،تغییرات درجه اول آن با فرم انتگرال W ازنوع گالرکین یکسان است(معادله

$$d\Pi=W=0 \qquad (43$$

درنتیجه جواب بدست آمدهاز روش ریتز با جواب بدست آمده توسط گالرکین یکسان خواهد بود.



مثال) حل Poisson به روش ریتز

با استفاده ازفرم تریسیل فونکسیونل داده شده درمثال وبااستفاده از تقریب u درمثال خواهیم داشت

$$\Pi(a_1,a_2)=\frac{1}{2}\langle a_1 \quad a_2\rangle\int_v\begin{pmatrix}\frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_1}{\partial y}\\ \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial x}\\ \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial y}\end{pmatrix}dv\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}-\langle a_1 \quad a_2\rangle\int_v\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix}f\,dv=0$$

با $d\Pi=0$ خواهیم داشت:

$$*\int_v\begin{pmatrix}\frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_1}{\partial y}\frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial P_1}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial y}\\ \frac{\partial P_1}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial P_1}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}\frac{\partial P_2}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial P_2}{\partial x}\\ \frac{\partial P_1}{\partial y} \quad \frac{\partial P_2}{\partial y}\end{pmatrix}dv\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\end{Bmatrix}-\int_v\begin{Bmatrix}P_1 f\\ P_2 f\end{Bmatrix}dv=0$$

برای یک المان روابط را می نوسیم وسپس با حلقه Do این کاررابرای تمامی المان ها بسط می دهیم*

این معادله با معادله ی مثال قبلی یکسان است.

مثال:قیاس روشهای مختلف.

مقدار $\frac{u_c}{f}$ که ازمتدهای متفاوت بدست آمده اندبه شرح زیرند.توابع پایه ی درنظرگرفته شده عبارتنداز:

$$P_1=\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right);\ P_2=P_1\left(x^2+y^2\right);\ P_3=P_1\left(x^2y^2\right)$$

توابع	هم قرارگیری نقاط	هم قرارگیری زیرقلمرو	گالرکین یا ریتز	حداقل مربعات	اندازه دقیق
P_1	0.2500	0.3750	0.3125	0.3409	0.2947
P_1, P_2	0.2976	0.2994	0.2922	0.2904	
P_1, P_2, P_3			0.2949	0.2949	

عرضه ماتریسی روش اجزای محدود

دراین فصل عرضه ماتریسی معادلات مورد نظر می باشد که گذار به برنامه نویسی را ممکن می سازد. در ابتدا روش اجزا محدود به مثابه روش مجزا سازی فرم انتگرالی از نوع گالرکین تعریف شده و انتگرالهای کلی W با مجموع انتگرال عنصری W^e جایگزین می شوند، سپس با استفاده از تقریب u توسط متد اجزا محدود مجزاسازی انجام می گیرد. در نتیجه ماتریسهای کلی و ماتریسهای عنصری شکل می گیرند. تکنیک جمع ماتریس های عنصری جهت به دست آوردن ماتریس کلی و بردارهای کلی استفاده شده در مسأله عرضه خواهند شد. خصوصیات ماتریس کلی و همچنین تکنیکهای ذخیره سازی این ماتریس و خصوصاً روش ذخیره سازی (خط آسمان) توضیح و تشریح می گردد.

1.روش اجزاء محدود

1-1تعریف:

روش اجزاء محدود عبارت است از استفاده از یک تقریب از نوع اجزاء محدود برای توابع ناشناخته U به منظور مجزاسازی فرم انتگرالی W و سپس معادلات به دست آمده.در اینجا از فرم انتگرالی W استفاده شده است که توابع وزن دار $y\equiv du$ می باشند.

$$W=\int_v du\left(L(u)+f_v\right)dv=0 \qquad (1)$$

باجایگزین نمودن این انتگرال بامجموع انتگرال های روی هرعنصر V^e خواهیم داشت:

$$W=\sum_{e=1}^{n_{el}}W^e=\sum_{e=1}^{n_{el}}\int_v du^e\left(L\left(u^e\right)+f_v\right)dv=0 \qquad (2-a)$$

به منظور محاسبه عبارت W^e که به فرم انتگرال عنصری موسوم است از تقریب ازنوع اجزا محدودبرای u و δu روی هرعنصراستفاده می شود

$$u^e=\langle N\rangle\{u_n\}$$
$$du^e=\langle N\rangle\{du_n\} \qquad (2-b)$$

می دانیم که <N> برای نقاط خارج ازهر عنصر صفرمی باشد وازآنجایی که $\{u_n\}$فقط براساس متغیرهای گرهی نوشته شده است،W^eفقط به متغیرهای عنصر e ارتباط دارد و همین خاصیت است که عامل اصلی موفقیت متد عناصر محدود است زیرا انتگرال یک عنصر محاسبه شده و با تکرار به کلیه محیط بسط داده می شود.

با استفاده از معادله (2-b) خواهیم داشت:

$$W^e=\int_{V^e}du^e\left(L\left(u^e\right)+f_v\right)dv$$

$$W^e=\langle du_n\rangle\left(\int_{V^e}\{N\}L\left(\langle N\rangle\right)dv\{u_n\}+\int_{V^e}\{N\}f_v dv\right) \qquad (2-c)$$

همانطوریکه در فصل پیش بحث شد، معمولاً از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کرده و درجه ی مشتقهایی که درمعادلات دخالت می کنندکاهش می دهیم.درنتیجه درعبارت W مشتقات δu وانتگرال های روی مرزبه وجود خواهدآمد. پس عبارت W^e به صورت زیرنوشته خواهدشد:

$$W^e=\int_{V^e}\left(\left\langle d\left(\partial u^e\right)\right\rangle[D]\{\partial u^e\}-du^e.f_v\right)dv-\int_{s_f^e}du^e.f_s\,ds \qquad (3)$$

که در آن:

$$\left\langle\partial u^e\right\rangle=\left\langle u^e \quad \frac{\partial u^e}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \quad \dots\dots\right\rangle$$

$$\left\langle\partial\left(du^e\right)\right\rangle=\left\langle du^e \quad d\left(\frac{\partial u^e}{\partial x}\right) \quad \dots \quad d\left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2}\right) \quad \dots\dots\right\rangle$$

[D] یک ماتریس مستقل از u^e ومشتقات آن برای عملگرخطی L می باشد.[D] برای عملگرهای غیرخطی تابع u^e ومشتقات u^e می باشد.

f_s, f_v : نیروهای حجمی وسطحی می باشند.

V^e : حجم عنصرو S_f^e : مرزالمان استکه روی آن شرایط حدّی مربوط بـه نیروهـای سـطحی تعریـف شـده اند.

مثال1)عبارت ماتریسی W^e برای معادلات پواسون

فرم انتگرالی عنصری W^e برای معادلات پواسون باحذف اندیس e روی u^eوδu^e به صورت زیر نوشـته مـی شود:

$$W=\sum_e W^e=\sum_e \int_{V^e} du\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f_v\right)dv=0$$

بعداز انتگرال گیری جزءبه جزء:

$$W=\sum_e W^e=\sum_e\left(\int_{V^e}\left(\langle d\,(\partial u)\rangle[D]\{\partial u\}-du\ f_v\right)dv-\int_{S_f^e} du\left(f_s-a\,u\right)ds\right)$$

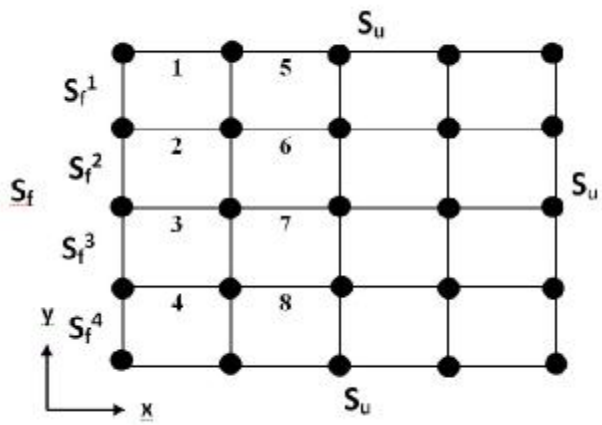
که درآن:

$$\langle d\,(\partial u)\rangle=\left\langle d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\quad d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\rangle$$

$$\langle \partial u\rangle=\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}\quad \frac{\partial u}{\partial y}\right\rangle$$

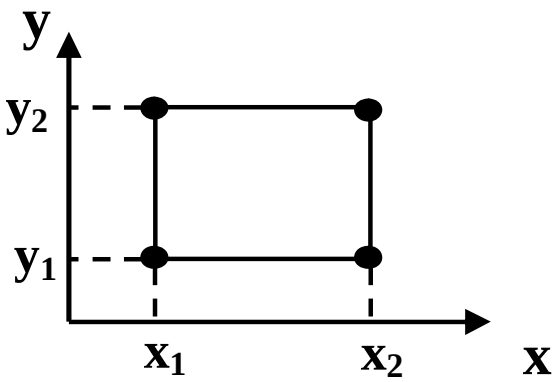
$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اگر محیط درنظرگرفته مطابق شکل (که به عناصر مستطیل شکل V^e تقسیم شده باشد) مستطیلی باشدوروی مرزهای این محیط دوبخش S_uوS_f در نظرگرفته شوند:



می دانیم که انتگرال روی مرز فقط برای عناصر 1و2و3و4 موجودخواهدبودوبرای هریک بصورت زیر نوشته می شود(4گرهی با2 آزادی: ماتریس 8*8)

$$\int_{y_1}^{y_2} du(x_1,y)\left(f_s - a\,u(x_1,y)\right)dy$$



بااستفاده ازمعادلات (2-b) در معادله (3) و همچنین معدلات مشابه برای $d\left(\partial u^e\right),\partial u^e$ بر حسب $\langle du_n\rangle,\{u_n\}$ درمعادله (3)به فرم ماتریسی زیر برای W^e مجزاشده خواهیم رسیدکه پایه ی روش عناصر محدودمی باشد.

$$W^e = \langle du_n\rangle\left([K]\{u_n\}-\{f\}\right) \qquad (4)$$

[K] : ماتریس عنصری است وبرای عملگرهای خطی مستقل از u می باشد.

{f}: بردارعنصری تحریکات

$\{u_n\}$: بردارعنصری متغیرهای گرهی

$\{\delta u_n\}$:بردارعنصری تغییرات متغیرهای گرهی می باشند.

فرم انتگرالی کلی(a -2) باجمع انتگرال های عنصری (4)بدست می آید:

$$W = \sum_e W^e = \sum_e \langle du_n\rangle\left([K]\{u_n\}-\{f\}\right) = 0 \qquad (5-a)$$

واین فرم به صورت زیرشکل داده می شود:

$$W = \langle dU_n\rangle\left([K]\{U_n\}-\{F\}\right) = 0 \qquad (5-b)$$

که درآن [K] و$\{U_n\}$و$\{\delta U_n\}$و{F}ماتریس و بردارهای کلی هستند.گذارازمعادله (5-a)به معادله (5-b)توسط روش جمع ماتریس های عنصری انجام می پذیردواجازه می دهدکه برای کل عبارات ماتریسی وبردارهای عنصری،عبارات ماتریسهاوبردارهای کلی [K]و{F}ساخته شوند.این مبحث در همین بخش موردتوجه قرارخواهدگرفت.

ازآنجاییکه W بجای تمام مقادیر $<\delta U_n>$ بایدصفرباشد،سیستم معادلات زیربرحسب $\{U_n\}$ بدست می آید:

$$[K]\{U_n\}=\{F\} \qquad (5-c)$$

درمسایل غیرپایا(non stationnaire) عباراتی از قبیل $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ظاهرمی شوندکه فرم انتگرالی مربوطه به شکل زیر به معادلات (2-a)افزوده خواهند شد:

$$W^e=\int_{V^e} du^e \frac{\partial u^e}{\partial t} dv \ , \ W^e=\int_{V^e} du^e \frac{\partial^2 u^e}{\partial t^2} dv \qquad (6-a)$$

این عبارات پس از مجزاسازی بااستفاده ازمعادلات(2-b)به صورت زیردرمی آیند:

$$W^e=\langle du_n\rangle[c]\left\{\frac{du_n}{dt}\right\} \ , \ W^e=\langle du_n\rangle[m]\left\{\frac{d^2u_n}{dt^2}\right\}$$

$$[c]=[m]=\int_{V^e}\{N\}\langle N\rangle dv \qquad (6-b)$$

که این ماتریسها،ماتریسهای عنصری جرم و میرایی خواهند بود.([m]و[c])

باقیمانده عنصری رابامعادله زیر تعریف می کنیم:

$$\{r\}=\{f\}-[k]\{u_n\} \qquad (6-c)$$

وباقیمانده کلی با جمع باقیمانده های عنصری بدست می آید:

$$\{R\}=\sum_e\{r\}=[F]-[K]\{U_n\} \qquad (6-d)$$

2.فرم انتگرالی عنصری مجزاشده W^e

2-1)عبارت ماتریسی W^e

بااستفاده ازتقریب عنصری برای u و δu ومشتقات آنها واستفاده از معادله (3)مـی تـوان فـرم مجزاشـده W^e رابدست آورد:

$$u=\langle N\rangle\{u_n\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left\langle\frac{\partial N}{\partial x}\right\rangle\{u_n\}$$

M $\qquad (7-a)$

$$du=\langle N\rangle\{du_n\}$$

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left\langle\frac{\partial N}{\partial x}\right\rangle\{du_n\}$$

M

درنتیجه:

$$\{\partial u\} = \begin{Bmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \{u_n\} = [B]\{u_n\}$$

$$(7-b)$$

$$\{d\,(\partial u)\} = \begin{Bmatrix} d\,u \\ d\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \{d\,u_n\} = [B_d]\{d\,u_n\}$$

[B] :ماتریس مشتقات(ارتباط $u, \partial u$)

برای عملگر $\mathbf{l}$ که auto-adjoint باشد:

$$\{d\,(\partial u)\} \equiv d\,(\{\partial u\}) \;\; ; \;\; [B_d] \equiv [B]$$

درنتیجه معادله(3)با استفاده ازمعادلات(7)به صورت زیرنوشته میشود:

$$W^e = \langle d\,u_n \rangle \left(\int_{V^e} [B_d]^T [D][B] dv \{u_n\} - \int_{V^e} \{N\} f_v dv - \int_{S_f^e} \{N\} f_s ds \right) \quad (8-a)$$

بامقایسه با معادله (4):

$$[K] = \int_{V^e} [B_d]^T [D][B] dv \qquad (8-b)$$

$$\{f\} = \int_{V^e} \{N\} f_v dv + \int_{S_f^e} \{N\} f_s ds \qquad (8-c)$$

$$\{f\} = \;\; volume \;\; + \;\; surface$$

مثال2)عبارت ماتریسی معادلات پواسون

تقریب u روی عنصربه صورت زیرنوشته می شود:

$$u = \langle N \rangle \{u_n\}$$

$$\partial\{u\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle \dfrac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \end{bmatrix} \{d\,u_n\} = [B_d]\{d\,u_n\} = [B]\{d\,u_n\}$$

دراین حالت $[B_d]\equiv[B]$ زیرا لاپلاسین یک عملگر auto-adjoint می باشد.

$$[K]=\int_{V^e}[B]^T[D][B]dv+\int_{S_f{}^e}a\{N\}\langle N\rangle ds$$

ماتریس K متقارن است.

$$\{f\}=\int_{V^e}\{N\}f_v\,dv+\int_{S_f{}^e}\{N\}f_s\,ds$$

درحالتی که بارگذاری درنقطه $x=x_i$ درروی سطح متمرکز باشد،تابع f_s یک گسترش دیراک $d(x_i)$ خواهد بود. $f_s(x_i)=f_i d(x_i)$

وبردار $\{f\}$ مربوط به صورت $\{f\}=\{N(x_i)\}f_i$ نوشته می شود.

2-2) فرم انتگرالی W^e روی عنصر مبنا

معمولاًتوابع درون یابی روی عنصر مبنا به صورت $N(x)$ داده می شود.عبارات W^e در(3)و(8)شامل مواردزیرمی باشد:

-مشتقات u و δu نسبت به x

-متغیرهای گرهی u_n, du_n بوده ودرعناصرمختلف مقادیرگرهی مشتقات u وδu نسبت به x میباشد.

-انتگرال گیری روی عنصرواقعی V^e

لذا لازم است که مشتقات نسبت به x و انتگرال گیری روی V^e به مشتقات نسبت به ξ وانتگرال گیری روی عنصر مبنا V^r تبدیل شوند.

2-2-1)تبیل مشتقات نسبت به x

مشتقات $u_{,x}, u_{,y}, u_{,z}, u_{,xx}$ نسبت $u_{,x}, u_{,h}, u_{,z}, u_{,xx}$ وعبارات عکس ماتریس ژاکوبین $[j]=[y]^{-1}$ که ازتبدیل هندسی بدست آمده اندبرحسب روابطی بیان می گردند،مثلا برای یک بعد می توان نوشت:

$$u(x)=\langle N(x)\rangle\{u_n\}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{dx}{dx}\frac{du}{dx}=\frac{dx}{dx}\left\langle\frac{dN(x)}{dx}\right\rangle\{u_n\}$$

عبارت(7-b)ماتریس [B] می تواندبه فرم زیرتغییرفرم یابد:

$$[B]=[Q][B_x]$$

$\left[B_x\right]$:ماتریسی است مشابه ماتریس مشتقات [B] ولیکن براساس مشتقات برحسب ξ توابع درون یابی N(ξ) درآن درنظر گرفته شده اند.

$[Q]$ ماتریسی است که ترمهای ماتریس ژاکوبین درآن موجود می باشد.

**هموژن(همگن): روی یک محور

انیزوتروپی:روی محورهای مختلف:

- انیزوتروپی هیدرولیکی :تغییرات k_x, k_y
- انیزوتروپی مکانیکی : تغییرات E_x, E_y

مثال3)تبدیل ماتریس [B] فرم انتگرالی پواسون

$$[B]=\begin{bmatrix}\left\langle\frac{\partial N}{\partial x}\right\rangle\\ \left\langle\frac{\partial N}{\partial y}\right\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x}\\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left\langle\frac{\partial N}{\partial x}\right\rangle\\ \left\langle\frac{\partial N}{\partial h}\right\rangle\end{bmatrix}=[Q]\left[B_x\right]$$

دراین حالت $[Q]=[J]^{-1}$ ودرنتیجه :

$$[K]=\int_{V^e}\left[B_x\right]^T[Q]^T[D][Q]\left[B_x\right]dv$$

2-2-2)تبدیل متغیرهای گرهی

درصورتیکه عنصر،عنصرمختلط نباشدتغییری حاصل نمی گردد.درصورتیکه با عناصر مختلط سروکارداشته باشیم،متغیرهای گرهی $\{u_n\}_x$روی عنصرمبنا و $\{u_n\}_x$روی عنصرواقعی،بارابطه زیربهم مربوط می شوند:

$$\{u_n\}_x=[T]\{u_n\}_x$$
$$\{du_n\}_x=[T]\{du_n\}_x$$

ماتریس T درفصل مربوط به المان های مختلط داده شده اند.این ماتریس حاوی ترمهای ماتریس ژاکوبین می باشد.

2-2-3)تبدیل حوزه انتگرال گیری

انتگرال حجمی روی V^e بایدبا انتگرال حجمی رویV^r جایگزین شود

$$\int_{V^e}.....dv=\int_{V^r}.....\det(J)\,dx\,dh\,dz \qquad (10)$$

حدودانتگرال گیری روی عناصرمبنای کلاسیک برحسب ξ به شرح زیرند:

- یک بعدی

$$\int_{x=-1}^{x=1} .....\det(J)dx$$

- دو بعدی

مثلث $$\int_{x=0}^{x=1}\int_{h=0}^{h=1-x} .....\det(J)\,dh\,dx$$

چهارضلعی $$\int_{x=-1}^{x=1}\int_{h=-1}^{h=1} .....\det(J)\,dh\,dx$$

- سه بعدی

چهاروجهی $$\int_{x=0}^{x=1}\int_{h=0}^{h=1-x}\int_{z=0}^{z=1-x-h} .....\det(J)\,dz\,dh\,dx$$

شش وجهی $$\int_{x=-1}^{x=1}\int_{h=-1}^{h=1}\int_{z=-1}^{z=1} .....\det(J)\,dz\,dh\,dx$$

منشور $$\int_{x=0}^{x=1}\int_{h=0}^{h=1-x}\int_{z=-1}^{z=1} .....\det(J)\,dz\,dh\,dx$$

2-2-4)تبدیل عنصر دیفرانسیل ds درانتگرال مرزالمان

a)انتگرال منحنی الخط دویا سه بعدی

انتگرال $I=\int_s .....ds$ برحسب مختصات منحنی الخط s روی منحنی S به صورت زیرنوشته میشود:

$$I=\int_{s_1}^{s_2} ....J_s\,ds \qquad (11-a)$$

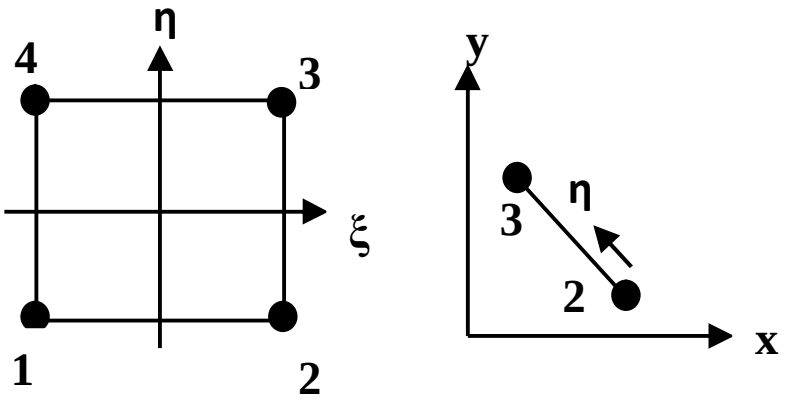
مختصات s معمولا یکی از متغیرهای x, h, z می باشد و منحنی S یکی از رویه های المان مبنا که روی آن نقطه ای که برحسب پارامتر s تعریف شده است اختیارمی گردد

$$X=\langle N(s)\rangle\{X_n\}$$

$$(11-b)$$

$$J_s=\sqrt{X_{,s}^{\ 2}+Y_{,s}^{\ 2}+Z_{,s}^{\ 2}}$$

مثال:انتگرال روی رویه ی یک عنصرچهارگرهی



انتگرال برای رویه $\xi=1$ عنصر چهارضلعی عرضه می شود:

$$s \equiv h \qquad ds = dh$$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4}\langle (1+x)(1-h);(1-x)(1-h);(1+x)(1+h);(1-x)(1+h) \rangle$$

$$\langle N(s) \rangle = \langle N(x=1,h) \rangle = \left\langle 0 \quad \frac{1-h}{2} \quad \frac{1+h}{2} \quad 0 \right\rangle$$

$$x_{,h} = \langle N_{,h}(x=1,h) \rangle \{x_n\} = \frac{1}{2}(x_3 - x_2)$$

$$y_{,h} = \frac{1}{2}(y_3 - y_2)$$

$$J_s = \sqrt{x_{,h}{}^2 + y_{,h}{}^2} = \sqrt{\left(\frac{x_3 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{2}\right)^2}$$

روی سطح:

$$I = \int_{-1}^{1} .....J_s dh$$

b)انتگرال روی سطح سه بعدی

انتگـرال $\int_s .....ds$ برحسـب مختصـات سـطوح S_1 , S_2 کـه درحالـت کلـی تـابع (x,h) یـا (x,z) ویا (h,z) هستند نوشته می شوند:

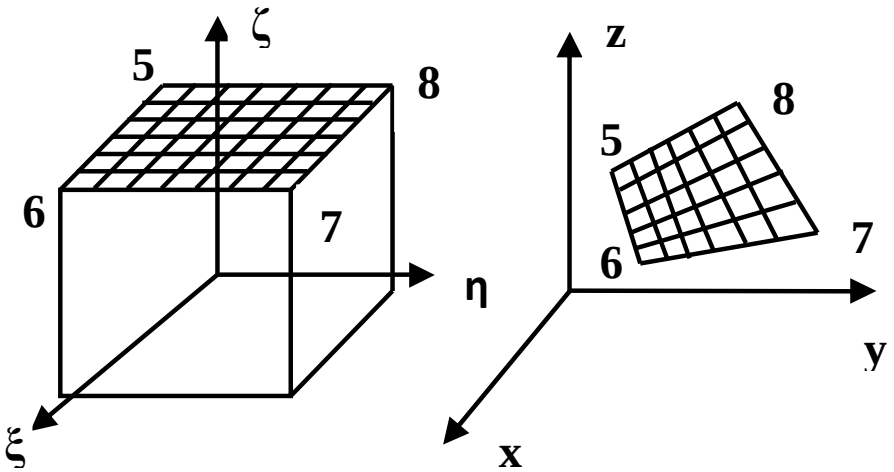
$$\int_s ....J_s ds_1 ds_2 \qquad (12-a)$$

که سطح S یکی ازوجوه عنصرمبنامیباشد.روی این وجه نقطه ای توسط دو پـارامتر s_1 و s_2 درنظـر گرفته شده است

$$x = \langle N(s_1, s_2) \rangle \{x_n\} \quad ,....$$

$$J_s = \sqrt{\left(y_{,s_1} z_{,s_2} - z_{,s_1} y_{,s_2}\right)^2 + \left(z_{,s_1} x_{,s_2} - x_{,s_1} z_{,s_2}\right)^2 + \left(x_{,s_1} y_{,s_2} - y_{,s_1} x_{,s_2}\right)^2} \quad (12-b)$$

مثال:انتگرال روی یک المان چهار وجهی هشت گرهی



روی سطح ζ=1 المان چهار وجهی هشت گرهی به این صورت انتگرال رامی نویسیم:

$$s_1 = x \qquad s_2 = h$$

$$ds_1 = dx \qquad ds_2 = dh$$

$$N(s_1, s_2) = N(x, h, z=1) = \frac{1}{4}\langle 0;0;0;0;(1-x)(1-h);(1+x)(1-h);(1+x)(1+h);(1-x)(1+h)\rangle$$

$$N_{,x}(x, h, z=1) = \frac{1}{4}\langle 0;0;0;0;-(1-h);(1-h);(1+h);-(1+h)\rangle$$

$$N_{,h}(x, h, z=1) = \frac{1}{4}\langle 0;0;0;0;-(1-x);-(1+x);(1+x);(1-x)\rangle$$

$$\langle x_{,x} \quad y_{,x} \quad z_{,x} \rangle = \langle N_{,x} \rangle \left[\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}\right]$$

$$\langle x_{,h} \quad y_{,h} \quad z_{,h} \rangle = \langle N_{,h} \rangle \left[\{x_n\} \ \{y_n\} \ \{z_n\}\right]$$

$$J_s = \sqrt{\left(y_{,s_1} z_{,s_2} - z_{,s_1} y_{,s_2}\right)^2 + \left(z_{,s_1} x_{,s_2} - x_{,s_1} z_{,s_2}\right)^2 + \left(x_{,s_1} y_{,s_2} - y_{,s_1} x_{,s_2}\right)^2}$$

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ....J_s(x, h)\, dx\, dh$$

2-2-5)عبارت $[K]$, $\{f\}$ روی عنصرمبنا:

اگرانتگرال گیری روی عنصرمبنا V^r استفاده شود،عبارات ماتریس $[K]$ و بردار $\{f\}$ به صورت زیر نوشته می شوند:

$$[K]=\underset{\substack{V^r\\ \downarrow\\ volume\ force(weight)}}{\int}\left[B_{dx}\right]^T[Q_d]^T[D][Q]\left[B_x\right]\det(J)\,dx\,dh\,dz \qquad (13-a)$$

$$\{f\}=\underset{\substack{V^r\\ \downarrow\\ surface\ force}}{\int}\{N\}f_v\det(J)\,dx\,dh\,dz+\underset{\substack{S_f^r\\ \Downarrow\\ volume\\ (Newman\ condition)}}{\int}\{N\}\,f_s\,J_s\,ds_1\,ds_2 \qquad (13-b)$$

surface

ماتریسهای $[B]$, $[Q]$ درمعادلات 9 و J_s درعبارات (13-b)و(12-b)داده شده اند.

2-3)فرم کلاسیک W^e وماتریس عنصری:

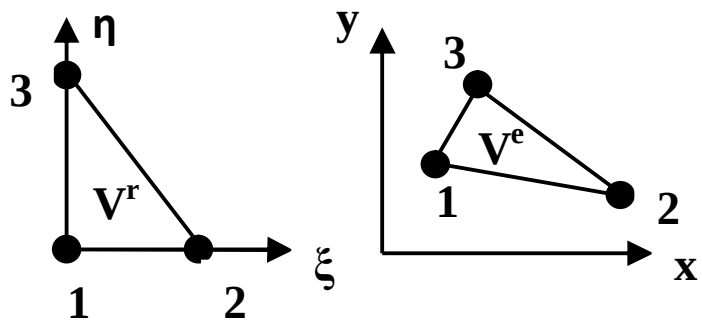
معمولاًفرم انتگرالی W^e ازمجموعه ای ازترمهایمتعددی تشکیل شده است.مثلاً

$$W^e=\int_{V^e}\left(\ d\left(\frac{du}{dx}\right).\frac{\partial u}{\partial x}+d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\ \right)dv$$

در جداول 1 و 2 عبارات و فرم های صریح ماتریس عنصری وماتریس های[B] و[D] که درفرم انتگرالی به آن برمی خوریم داده شده اند.

3)تکنیک محاسبه ماتریس های عنصری

3-1)محاسبه صریح معادله پواسون برای یک عنصرمثلثی



$$\langle N\rangle=\langle 1-x-h \quad x \quad h\rangle$$

$$[j]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_3-y_1 & -(y_2-y_1)\\ -(x_3-x_1) & x_2-x_1\end{bmatrix} \qquad [J]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{bmatrix}$$

$$\det(J)=2A=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1) \qquad (14-a)$$

$$\left[B_x\right]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

سطر اول $\frac{\partial N}{\partial x}$ وسطردوم $\frac{\partial N}{\partial h}$ میباشد.

$$[B]=[j][B_x]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_2-y_3 & y_3-y_1 & y_1-y_2 \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{bmatrix} \qquad D=k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که k ضریب هدایت همسان می باشد که درمعادلات لاپلاس 1 درنظر گرفته می شود.

$$[K]=\int_0^1\int_0^{1-x} k\,[B]^T\,[B]\det(J)\,dh\,dx$$

ماتریس [B] ثابت ودرنتیجه $K=A.k.[B]^T\,[B]$ بدست می آید.

$$[K]=\frac{k}{4A}\begin{bmatrix} (y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2 & (y_3-y_2)(y_1-y_3)+(x_3-x_2)(x_1-x_3) & (y_2-y_1)(y_3-y_2)+(x_2-x_1)(x_3-x_2) \\ & (y_3-y_1)^2+(x_3-x_1)^2 & (y_1-y_3)(y_2-y_1)+(x_1-x_3)(x_2-x_1) \\ sym & & (y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2 \end{bmatrix}_{3*3} \qquad (15)$$

اگر عنصر واقعی مثل عنصرمبنا باشد دراین حالت:

$$x_1=y_1=0\ ;\ x_2=a\ ;\ y_2=0\ ;\ x_3=0\ ;\ y_3=a$$

$$[K]=\frac{k}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ & 1 & 0 \\ sym & & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

و ماتریس جرم:

$$[m]==\int_0^1\int_0^{1-x}\{N\}\langle N\rangle\det(J)\,dh\,dx$$

$$[m]=\frac{A}{12}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

بردار {f}با فرض f_v ثابت و f_s صفر به صورت زیر است:

$$\{f\}=\frac{Af_v}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3-2)درحالت کلی جهت محاسبه ماتریس سختی عنصری بایدازانتگرال گیری عددی استفاده نمود.روشهای انتگرال گیری عددی در بخش دیگری با جزئیات توضیح داده شده اند.دراینجافقط گام های لازم جهت محاسبه ماتریس سختی وبردارنیروی عنصری ذکر می شوند.

a)عملیات مشترک درهمه عناصرمشترک(دارای یک عنصرمبنا)

-محاسبه مختصات ξ_r وضرایب وزن دار W_r برای نقاط انتگرال گیری(درمتدگوس)

-محاسبه توابع $\bar{N}, N$ ومشتقات آنها برحسب ξ درنقاط انتگرال گیری (درعناصر ایزوپارامتریک $N \equiv \bar{N}$)

b)عملیات لازم برای محاسبه ماتریس [K] هرعنصر

-شروع عملیات با صفرگذاری کلیه ترمهای ماتریس سختی

-برای هرنقطه انتگرال گیری عملیات زیرانجام می گیرد(برای هر ξ_r):

I. محاسبه ماتریس ژاکوبین [J] با محاسبه مشتقات $\bar{N}$ نسبت به ξ و مشتقات مختصات گره ها و همچنین محاسبه عکس این ماتریس.

II. محاسبه مشتقات توابع درون یابی N برحسب x ازمشتقات برحسب ξ

III. ساختن ماتریس های [D]و[B]

IV. جمع حاصلضرب $[B]^T[D][B]\det J\, W_r$ درماتریس[K]

c)عملیات لازم جهت محاسبه ماتریس جرم [m]

- شروع عملیات با صفرگذاری عبارات ماتریس [m]

-برای هرنقطه انتگرال گیری ξ_r:

ماتریس ژاکوبین ودترمینان آن را حساب می کنیم.

حاصلضرب $\{N\}\langle N\rangle \det(J) W_r$ را در ماتریس[m] جمع می کنیم.

d) عملیات لازم جهت محاسبه بردار تحریکات {f}با درنظرگرفتن f_v ثابت

-شروع عملیات باصفرگذاری عبارات بردار {f}(اول هر Doباید f را صفرنمایید تا برای هرالمان f را مجدداً در نظر بگیرید)

- برای هرنقطه انتگرال گیری ξ_r:

ماتریس ژاکوبین ودترمینان آن را حساب می کنیم.

حاصلضرب $\{N\} f_v \det(J) W_r$ را در بردار {f} جمع می کنیم

e) عملیات لازم جهت محاسبه باقیمانده {r}بر مبنای جواب $\{u_n\}$

-درابتدا باقیمانده ی {r} رابا {f} محاسبه شده درd مساوی می گذاریم.

- برای هرنقطه انتگرال گیری ξ_r:

ماتریسهای $[J],[D],[B]$ را مانند آنچه که در b آمد می سازیم.

حاصلضرب $[B]^T[D][B]\{u_n\} W_r \det(J)$ رادر {r} جمع می‌کنیم.

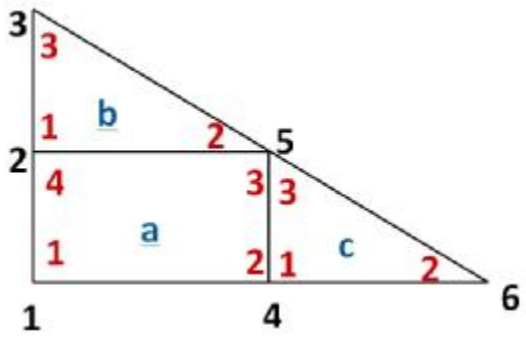
f) عملیات لازم جهت محاسبه گرادیان $\{\partial u\}$در نقاط انتگرال گیری بر مبنای جوابهای $\{u_n\}$بدست آمده:

- برای هرنقطه انتگرال گیری

ماتریس [B] رامی سازیم.

گرادیان $\{\partial u\}=[B]\{u_n\}$ رامحاسبه و چاپ می کنیم.

نحوه جمع کردن



	1	2	3	4	5	6
1	a	a		a	a	
2	a	ab	b	a	ab	
3		b	b		b	
4	a	a		ac	ac	c
5	a	ab	b	ac	abc	c
6				c	c	c

تکنیک جمع ماتریسهای عنصری

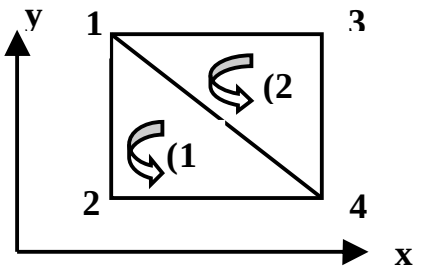
گامهای جمع ماتریس

-ساخت ماتریس عنصری

-افزودن ماتریس های عنصری وبردارعنصری در ماتریس کلی

-تشکیل تابلوی محل یابی گره ها

-افزودن



عناصر	گره ها		
1	1	2	4
2	1	4	3

-یک درجه آزادی:

$$general\ vector \rightarrow \langle U_r \rangle = \langle u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; u_4 \rangle$$

عنصر اول:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \;\; u_2 \;\; u_4 \rangle$$
$$LOCE = \langle 1 \quad 2 \quad 4 \rangle$$

عنصر دوم:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \;\; u_4 \;\; u_3 \rangle$$
$$LOCE = \langle 1 \quad 4 \quad 3 \rangle$$

-دو درجه آزادی:

$$general\,vector \rightarrow \langle U_n \rangle = \langle u_1\ v_1 \quad u_2\ v_2 \quad u_3\ v_3 \quad u_4\ v_4 \rangle$$

عنصر اول:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1\ v_1 \quad u_2\ v_2 \quad u_4\ v_4 \rangle$$
$$LOCE = \langle 1\ 2 \quad 3\ 4 \quad 7\ 8 \rangle$$

عنصر دوم:

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1\ v_1 \quad u_4\ v_4 \quad u_3\ v_3 \rangle$$
$$LOCE = \langle 1\ 2 \quad 7\ 8 \quad 5\ 6 \rangle$$

درنتیجه تکنیک به صورت زیر بدست می آید:

هرترم ماتریس عنصری K_{ij} ازماتریس [K] عنصری بصورت $K_{ij}^{\ e}$ ازماتریس $\left[K^e\right]$

در می آید به صورتی که:

$$I = LOCE(i) \qquad i = 1, n_{de} \qquad n_{de} = n_e . n_{dn}$$
$$J = LOCE(j) \qquad j = 1, n_{de}$$

n_{de} درجه آزادی کلی هر المان $\qquad n_e$ شماره گره های هر المان

n_{dn} درجه آزادی هر گره

و:

$$K^e{}_{IJ} = K^e{}_{LOCE(i),LOCE(j)} \equiv K_{ij}$$

وبرای بردار F نیز:

$$F^e{}_I = F^e{}_{LOCE(i)} \equiv f_i$$

الگوریتم کلی چنین است:

1)تمام ترمهای ماتریس $[K],[F]$ کلی را صفر می کنیم.

2)برای هرعنصر

-هرترم K_{ij} را به ماتریس K_{IJ} کلی تبدیل می کنیم باروش:

$$K_{IJ} = K_{IJ} + K_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n_{de} \\ j = 1, 2, \ldots, n_{de} \end{matrix}$$

که:

$$I = LOCE(i)$$
$$J = LOCE(j)$$

-هرترم f_i رانیز به طریق بالا به ماتریس کلی $\{F\}$اضافه می کنیم:

$$F_I = F_I + f_i \quad i = 1, 2, ..., n_{de}$$
$$I = LOCE(i)$$

برنامه به صورت زیر درمی آید:(IDLE درجه آزادی هر المان)

```
DIMENTION    VKE(IDLE,IDLE) , VFE(IDLE) , KLOCE(IDLE),
             VKG(NEQ,NEQ) , VFG(NEQ)

      Do  1  ID = 1, IDLE
      I = KLOCE(ID)
      VFG(I) = VFG(I) + VFE(ID)
      Do  1  JD = 1, IDLE
      J = KLOCE(JD)
10    VKG(I,J) = VKG(I,J) + VKE(ID,JD)
      RETURN
END
```

IDLE: تعداددرجه آزادی هر المان

KLOCE: بردار عنصری محل یابی

ساختن بردار KLOCE

تئوری:

یک درجه آزادی: تابلوی LOCE مثل تابلوی ارتباط عنصربا گره می باشد(تابلوی CONEC) (76)
(درجات آزادی را در هر المان کنارهم می گذاریم)

چنددرجه آزادی: اگرفرض کنیم متغیرهای گرهی به ترتیب زیرمرتب شده باشند:

$$elemental \quad \{u_n\}^T = \{u_i \;\; v_i \;\; ... \;\; , u_j \;\; v_j ...,...\}$$
$$General \quad \{U_n\}^T = \{U_1 \;\; V_1 \;\; ... \;\; ,U_2 \;\; V_2 ... \;\; ,U_n \;\; V_n ...\}$$

i,j :شماره گره ها درهر عنصر و n: شماره گره ها در کل هستند.

درجه آزادی کلّی هر المان برابراست با تعدادگره های هرالمان ضربدر درجه آزادی هر گره.

درجات آزادی
- 3n
- 3n-1
- 3n-2

$$n_{de} = n_e * n_{dn}$$

n_{de}: درجه آزادی کل هر المان

n_e: تعداد گره های هر المان

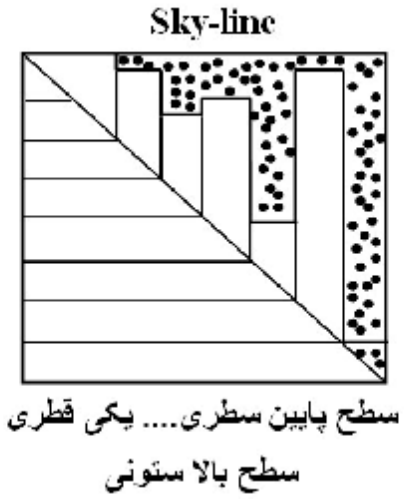
n_{dn}: درجه آزادی هر گره

برنامه LOCE :

```
DIMENTION    KCONEC(NDE), KLOCE(NDE)
                 IDLE          IDLE

J=0

C       NNEL

DO  1   IN=1,NNEL

IDO=(KCONEC(IN)-1)*NDLN

C

Do  1   ID=1,NDLN

J=J+1

KLOCE(J)=ID+IDO

RETURN

END.
```

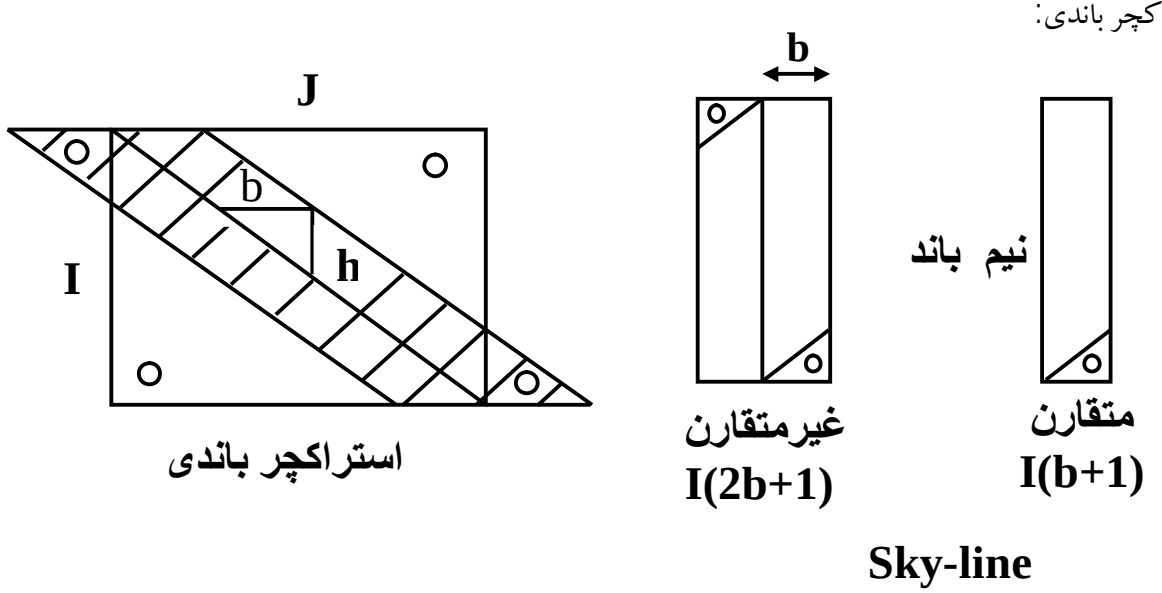
NNEL: حلقه روی تعداد گره های هرالمان

NDLN: درجه آزادی هر گره



ماتریس های کلّی

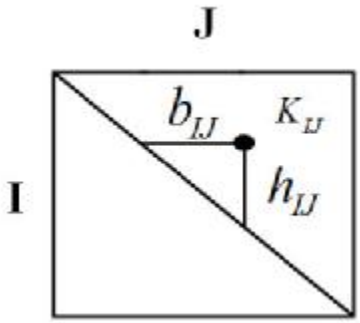
استراکچر باندی:



با شناختن $K^e_{IJ} = k^e_{ij}$ که درآن:

$$I = LOCE(i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n_{de}$$
$$J = LOCE(j) \qquad j = 1, 2, \ldots, n_{de}$$

قاعده جمع ماتریسها به صورت متقارن در حالت I و J قابل اعمال است.یعنی وقتی که ترم K_{IJ} غیرصفرموجود باشد،ترم غیر صفر K_{JI}نیز موجود است.پس در نتیجه می توان فقط نصف بالایی را جمع کرد.یعنی برنامه درصورتیکه J **f** I باشد نوشته می شود:

	$J > I$	
	$b_{IJ} = J - I$	فاصله افقی
	$h_{IJ} = b_{IJ}$	فاصله عمودی

در نتیجه برای J>I :

$$b_{IJ} = J - I = LOCE(j) - LOCE(i)$$

عرض باند ذخیره سازی المان برابر خواهد بود با حداکثر $b^e{}_{IJ}$ هر المان.در نتیجه برای کل باید بزرگترین $b^e{}_{IJ}$ عنصری را پیدا کرد.

حلقه

$$i = 1, 2, \ldots, n_{de}$$
$$I = LOCE(i)$$

حلقه

$$j = 1, 2, \ldots, n_{de}$$
$$b^e{}_I = \underset{j}{Max}\left(LOCE(j) - I\right) = \underset{j}{Max}\left(LOCE(j)\right) - I$$

همین کاربرای فاصله عمودی حداکثر بایدانجام شود:

$$j = 1, 2, \ldots, n_{de}$$
$$J = LOCE(j)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n_{de}$$
$$h^e{}_J = \underset{i}{Max}\left(J - LOCE(i)\right) = J - \underset{i}{Min}\left(LOCE(i)\right)$$

درنتیجه عرض باند ذخیره سازی ماتریس کلّی [K] : $b_I = \underset{e}{Max}\left(b_I^{\,e}\right)$

واضح است که روی خط I ترمهای K_{IJ} که $J > b_I + 1$ باشد،صفرهستند وروی ستون I نیز ترمهای K_{JI} که $J > b_I + 1$ باشد،صفرند.

حداکثرارتفاع ستون J نیز به صورت روبرو در می آید: $h_J = \underset{e}{Max}\left(h_J^{\,e}\right)$

$$h = b \quad \text{(symmetry)} \Leftrightarrow \begin{cases} b = Max\left(b_I\right) & \textit{for the all rows of } I \\ h = Max\left(h_J\right) & \textit{for the all columns of } J \end{cases}$$

لازم به تذکر است که ترمهای قطری درنظرگرفته نشده اندودرنتیجه برای ماتریس قطری bوh مساوی صفر هستند.

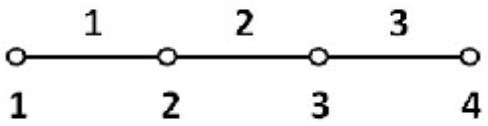
نکات

*در استراکچر باندی : از اولین عدد برخوردی به صفر،آنرا پایین می آورد.

*معمولاًماتریس ها را با هم جمع نمی کنیم تا کلاً جمع شوند.

*هرچه اختلاف شماره گره ها برای هر المان کمتر باشد، مقدار b کمتر می شود.

مثال: با یک درجه آزادی



$$member\,1: \quad LOCE = \langle 1 \quad 2 \rangle$$
$$b_I^{(1)} = \langle 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$
$$h_J^{(1)} = \langle 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$member\,2: \quad LOCE = \langle 2 \quad 3 \rangle$$
$$b_I^{(2)} = \langle 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \rangle$$
$$h_J^{(2)} = \langle 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \rangle$$

$$member\,3: \quad LOCE = \langle 3 \quad 4 \rangle$$
$$b_I^{(3)} = \langle 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \rangle$$
$$h_J^{(3)} = \langle 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \rangle$$

$$for\ general\ matrix:$$
$$b_I = \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \rangle$$
$$h_J = \langle 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \rangle$$
$$b = h = 1$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \times & \times & o & o \\ \times & \times & \times & o \\ o & \times & \times & \times \\ o & o & \times & \times \end{bmatrix}$$

توضیح قاعده کلی:

باید فاصله شماره گره ها را برای حداقل کردن عرض باند به حداقل رساند.

متدهای ذخیره سازی

1)ماتریس کامل غیرمتقارن: با ابعاد n*n باید n^2 کلمه حقیقی در حافظه کامپیوتر ذخیره شود.

2)ماتریس کامل متقارن: اگرماتریس روبرو دربردار VK به صورت ستون پایین رونده ذخیره شود.

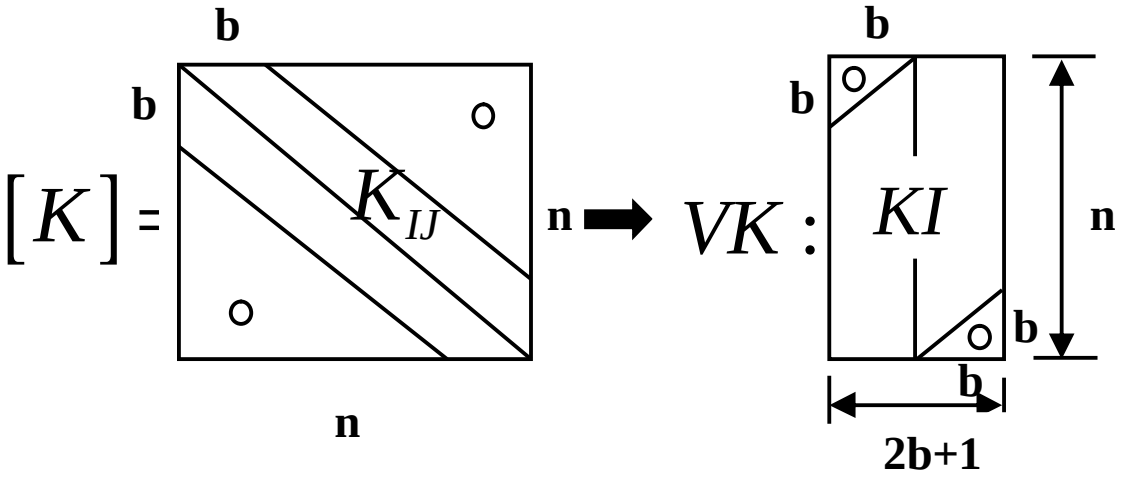
$$[K]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$V_K=\langle K_{11} \quad K_{12} \quad K_{22} \quad K_{13} \quad K_{23} \quad K_{33}\rangle$$

$$K_{IJ}\equiv VK_l \quad , \quad l=\frac{J(J-1)}{2}+I \qquad J\geq I$$

درنتیجه باید $\frac{n(n+1)}{2}$ کلمه حقیقی ذخیره کرد.

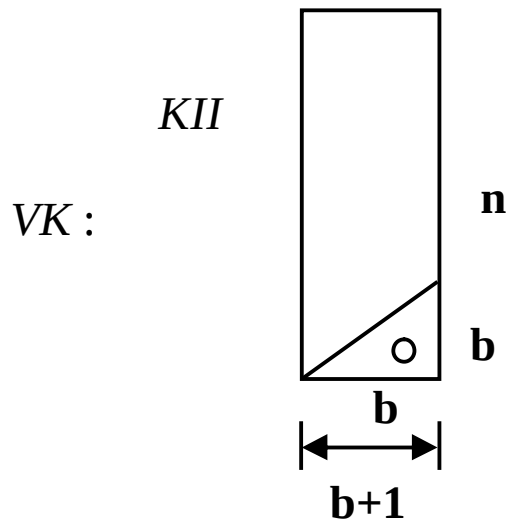
3)ماتریس باند غیر متقارن



$$K_{IJ}=VK_{ij} \qquad if \quad \begin{cases} i=I \\ j=J-I+1+b \end{cases}$$

درنتیجه باید n(2b+1) کلمه حقیقی که b(b+1) آن صفراست ذخیره کنیم.

4)ماتریس باند متقارن



در این صورت :

$$K_{IJ} \equiv VK_{ij} \quad if \quad \begin{cases} i = I \\ j = J - I + 1 \\ J \geq I \end{cases}$$

درنتیجه n(b+1) کلمه حقیقی که $\frac{b(b+1)}{2}$ غیر مفید دارد ذخیره می شود.

5)متد خط آسمان ماتریس غیر متقارن

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & o & K_{14} & o \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & o \\ o & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & o \\ o & o & K_{53} & o & K_{55} \end{bmatrix}$$

سه بردار متفاوت زیر را برای ذخیره سازی درنظرمی گیریم:

-بردار ترمهای قطری *VKGD*

-بردار ترمهای مثلث بالایی *VKGS*

-بردار ترمهای مثلث پایینی *VKGI*

بردار *VKGS* به صورت ستون پایین رونده ذخیره وبردار *VKGD* به صورت ردیف از چپ به راست ذخیره می شوند یعنی:

$$VKGD = \langle K_{11} \quad K_{22} \quad K_{33} \quad K_{44} \quad K_{55} \rangle$$
$$VKGS = \langle K_{12} \quad K_{23} \quad K_{14} \quad K_{24} \quad K_{34} \quad K_{35} \quad \mathrm{o} \rangle$$
$$VKGI = \langle K_{21} \quad K_{32} \quad K_{41} \quad K_{42} \quad K_{43} \quad K_{53} \quad \mathrm{o} \rangle$$

خط آسمان: پوش حداکثرستون های با ارتفاع متفاوت است که باید ذخیره شوند.یا متقارن ویا غیر متقارن است.این خط توسط تابلوی ارتفاع ستون h_J تعریف می شود که دربخش قبل توضیح داده شد:

$$h_J = \langle 0 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \rangle$$

ارتفاع ستون اول	تفاع ستون سوم فقط K_{23}	ارتفاع ستون پنجم K_{35} و o

ترمهای صفرخارج ازخط ذخیره تمی شوند،لیکن ترمهای صفر داخل خط آسمان ذخیره می شوند.
برای تعریف محلّ ترم نامشخص K_{ij} دربردارهای $VKGS$ یا $VKGI$ بایـد ازتـابلوی "محـل ابتـدای سـتون ها"استفاده کرد(KLD) که دیمانسیون n+1 داردوتوسط رابطه زیرتعریف می شود:

$$KLD(1)=1$$
$$KLD(2)=1$$
$$KLD(I)=KLD(I-1)+h_J(I-1) \qquad I=3,4,...,n+1$$

مثلاًدر حالت مثال بالا:

$$KLD=\langle 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \rangle$$

یعنی اینکه ترم K_{ij} درمحل های زیر خواهدبود:

اگر $I=J$ باشد در $VKGD(I)$

اگر $I<J$ باشد در $VKGS(l)$; $l=KLD(J+1)-J+I$

اگر $I>J$ باشد در $VKGI(l)$; $l=KLD(I+1)-I+J$

در نتیجه جای لازم برای ذخیره سازی به شرح زیراست: برای:

$VKGD$: n کلمه

$VKGI, VKGS$: $KLD(n+1)-1$

که درکل : $n+2(KLD(n+1)-1)$ کلمه حقیقی جا لازم خواهد بود.

درحالت متقارن تابلوی $VKGI$ مفیدنیست ودرنتیجه $n+KLD(n+1)-1$ کلمه جا نیاز دارد.

مثال:ذخیره سازی خط آسمان غیرمتقارن

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{11} & o & o & K_{14} \\ o & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ o & K_{32} & K_{33} & o \\ K_{41} & K_{42} & o & K_{44} \end{bmatrix} \qquad n=4$$

دراین حالت:

$h_J = \langle 0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \rangle$

$KLD = \langle 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \rangle$

$VKGS = \langle K_{23} \quad K_{14} \quad K_{24} \quad 0 \rangle$

$VKGI = \langle K_{32} \quad K_{41} \quad K_{42} \quad 0 \rangle$

$VKGD = \langle K_{11} \quad K_{22} \quad K_{33} \quad K_{44} \rangle$

یعنی با فرمول بالا مثلاًترم K_{24} در محلّ $VKGS(l)$ که l معادل عدد زیر است خواهد بود:

$$l = KLD(4+1) - 4 + 2 = 3$$

جای لازم برابر است با: کلمه حقیقی $4 + 2\left(KLD(5) - 1\right) = 12$

4-7)اعمال شرایط حدّی از نوع دیریکله

4-7-1) سیستم کلی معادلات

پس از جمع ماتریس ها وبردارهای طرف دوم،فرم انتگرالی به صورت زیرنوشته می شود:

$$W = \langle dU_n \rangle \left([K]\{U_n\} - \{F\} \right) = 0$$

این سیستم انتگرالی درون خود شرایط حدّی روی S_f را اقناع می کندولیکن شرایط روی S_u را بایدهمراه ان درنظر گرفت.برای فرم مجزا شده باید شرایط زیر را اقناع کرد:

$$du_i = 0$$

$$U_i = \bar{U}_i \qquad 4-44$$

در نتیجه فرم کلی معادلات جبری به صورت زیردر می آید:

$$[K]\{u_n\} = \{F\} \qquad (4-45)$$

4-7-2)معرفی شرایط حدی

ماتریس کلی [K] بدون در نظرگرفتن شرایط حدّی جمع شده است،پس بایدبرای هر رابطه $U_i = \bar{U}_i$ باروشهای زیرمعادلات و ماتریس K اصلاح شوند:

1)روش عبارت غالب روی قطر

در این روش سعی می شود عددی بسیاربزرگ درمعادله موردنظر به صورت زیروارد شود:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{L} & K_{1i} & \mathbf{L} & K_{1n} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ K_{i1} & \mathbf{L} & K_{ii}+a & \mathbf{L} & K_{in} \\ \mathbf{M} & & \mathbf{M} & & \mathbf{M} \\ K_{n1} & \mathbf{L} & K_{ni} & \mathbf{L} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \mathbf{M} \\ U_i \\ \mathbf{M} \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \mathbf{M} \\ a\bar{U}_i \\ \mathbf{M} \\ F_n \end{Bmatrix} \qquad (4-46)$$

درنتیجه رابطه i به صورت زیر نوشته می شود:

$$aU_i + \left(\sum_{j=1}^{n} K_{ij}U_j \right) = aU_i \qquad (4-47)$$

(مقدار $\sum_{j=1}^{n} K_{ij}U_j$ ناچیز است)

رابطه تقریبی زیربرای جواب صحیح است:

$$U_i \cong \bar{U}_i \quad if \quad a\bar{U}_i \geq \sum_{j=1}^{n} K_{ij}U_j$$

معمولاً α معادل $10^7 * Max|K_{ij}|$ یا $10^{15} * Max|K_{ij}|$ انتخاب می شود.

*برای مصالح از یک جنس می توانیم ازاین روش استفاده کنیم.

*درکارهای خاکی ماتریس ها معلوم نیست چه اندازه ای می باشند،بنابراین نمی توانیم از این روش استفاده کنیم.

متد عبارت واحد روی قطر

این متد به صورت زیر انجام می پذیرد:

برای هر رابطه $U_i = \bar{U}_i$ ماتریس K و بردار F بایداصلاح گردند:

$$F_j = F_j - K_{ji}\bar{U}_i \qquad j = 1,2,...,n \quad j \neq i$$

$$F_i = \bar{U}_i$$

$$K_{ji} = K_{ij} = 0 \qquad j = 1,2,...,n \quad j \neq i$$

$$K_{ii} = 1$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{L} & K_{1,i-1} & 0 & K_{1,i+1} & \mathbf{L} & K_{1n} \\ \mathbf{M} & & & & & & \\ K_{i-1,1} & \mathbf{L} & K_{i-1,i-1} & 0 & K_{i-1,i+1} & \mathbf{L} & K_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ K_{i+1,1} & \mathbf{L} & K_{i+1,i-1} & 0 & K_{i+1,i+1} & \mathbf{L} & K_{i+1,n} \\ \mathbf{M} & & & & & & \mathbf{M} \\ K_{n1} & \mathbf{L} & K_{n,i-1} & 0 & K_{n,i+1} & \mathbf{L} & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ \mathbf{M} \\ U_{i-1} \\ U_i \\ U_{i+1} \\ \mathbf{M} \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - K_{1i}\bar{U}_i \\ \mathbf{M} \\ F_{i-1} - K_{i-1,i}\bar{U}_i \\ \bar{U}_i \\ F_{i+1} - K_{i+1,i}\bar{U}_i \\ \mathbf{M} \\ F_n - K_{n,i}\bar{U}_i \end{Bmatrix} \qquad (4-48)$$

متد حذف معادله

دراین روش معادله مربوط به درجه آزادی داده شده ازسیستم معادلات حذف می گردد.در این روش تعداد مجهولات سیستم کاهش یافته وباماتریس کوچکتری کار خواهد شد.از آنجائیکه دوباره ساختن ماتریس [K] عملیات پرخرجی است لذا بهتراست ازابتدا این معادلات حذف شوند.درنهایت معادلات بدست آمده وماتریس [K] نهایی،مانند ماتریس عرضه شده در معادله (4-48) است با این تفاوت که سطروستون i حذف شده اند.

مثال:سیستم معادلات زیرموجود است.شرط حدّی $U_1 = \bar{U}_1$ رادرآن اعمال کنید.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & K_{23} & K_{33} & 0 \\ K_{14} & K_{24} & 0 & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

روش عبارت غالب:

$$\begin{bmatrix} K_{11}+10^{15} & O & O & K_{14} \\ O & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ O & K_{23} & K_{33} & O \\ K_{14} & K_{24} & O & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^{15}.\bar{U}_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

روش عبارت واحد

$$\begin{bmatrix} 1 & O & O & O \\ O & K_{22} & K_{33} & K_{24} \\ O & K_{23} & K_{33} & O \\ O & K_{24} & O & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - K_{14}\bar{U}_1 \end{Bmatrix}$$

حذف معادله اول

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{23} & K_{33} & O \\ K_{24} & O & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 - K_{14}\bar{U}_1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad U_1 = \bar{U}_1$$

غیر خطی بودن معادلات به دو دلیل زیر در فرمول بندی فیزیکی مسائل ظاهر می شود:

- پارامترهای فیزیکی خاصی که در حالت خطی مستقل هستند. مثل ضریب ارتباطی و ضریب هدایت حرارتی و یا از جهت استقلال خویش را از دست داده و تابع متغیرهای اصلی مسأله U_n می گردند. مثال

این نوع معادلات پلاستیه در جامد است و جریان های غیر نیوتنی و جریان در محیط های غیر اشباع می باشند.

- عبارات غیر خطی نسبت به مجهولات مسأله در معادلات مشتقات نسبی ظاهر می شوند، حتی وقتی که پارامترهای فیزیکی مستقل از U_n هستند. مثل معادلات ناویه استوکس که در آن عبارات $u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}$ ظاهر می‌گردند. یا معادلات با تغییر مکان‌های بزرگ:

$$e_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2$$

روش عناصر محدود فرمول بندی مجزا شده زیر را در مورد مسائل غیر خطی به صورت فرم کلی به دست می دهد.

$$W=<du_n>([K(u_n)]\{u_n\}-\{F\})=0 \quad <S_u> \text{ برای تمام } \quad (1)$$

یا

$$[K(u)]\{U\}=\{F\} \text{ یا } \{R(u)\}=\{F\}-[K(u)]\{U\}=0$$

استراتژی کلی برای حل مسائل موجود نیست ولیکن سه روش زیر یا ترکیبی از آنها استفاده می گردند:

- متد جایگزینی
- متد نیوتن – رافسون
- متد جزیی (incrementale)

- متد جایگزینی

این روش عبارت است از به دست آوردن یک سری جواب $\{u^0\},\{u^1\},....,\{u^i\}$ که $\{u^i\}$ بر اساس $\{u^{i-1}\}$ و حل سینوسی خطی زیر به دست آمده است.

$$[K\{u^{i-1}\}]\{u^i\}=\{F\} \quad , \quad i=1,2,3,...,n \qquad (2)$$

که به صورت جزیی زیرا با معرفی باقیمانده $\{R^i\}$، نوشته می شود:

$$\{R^i\}=\{R(u^{i-1})\}=\{F\}-[K(u^{i-1})]\{u^{i-1}\}$$

$$[K(u^{i-1})]\{\Delta u^i\}=\{R^i\} \qquad (3)$$

$$\{u^i\}\{u^{i-1}\}+\{\Delta u^i\}$$

با دانستن $\{u^{i-1}\}$ می توانیم $[K(u^{i-1})]$ را ساخته (ماتریس عنصری) و با جمع آنها با ماتریس کلی $[K(U^{i-1})]$ را به دست آورده و سیستم خطی بالا را حل کنیم. الگوریتم متد جایگزینی به صورت زیر نوشته می شود:

سیستم متد جایگزینی

جواب تقریبی اولیه $\{U^0\}$ را به دست می آوریم (احتمالا صفر)

{F} را از جمع بردارهای عنصری {f} به دست می آوریم.

برای هر تکرار .... ,i = 1,2 :

برای هر عنصر:

- مقادیر بردار $\{u^{i-1}\}$ را از بردار کلی $\{U^{i-1}\}$ خارج کرده و
- ماتریس $[K(U^{i-1})]$ را به دست آورده
- باقیمانده عنصری $\{r\}=\{f\}-[K]\{u^{i-1}\}$ را حساب می کنیم
- مانند حالات خطی ماتریس و بردار زیر را جمع می کنیم [K] در [K] و {r} در $\{R^i\}$
- معادله $[K]\{\Delta u^i\}=\{R^i\}$ را مانند حالات خطی حل می کنیم
- تخمین جدید جواب را به دست می آوریم $[U^i]=\{U^{i-1}\}+w\{\Delta U^i\}$

(w ضریب پیش رهایی که 1 در نظر گرفته می شود و همواره w>1)

نرم $\|n\|$ از $\{\Delta U^i\}$ یا $\|m\|$ مربوط به $\{R^i\}$ را به دست آورده

- آزمایش Convergence با استفاده از $\|n\|$ یا $\|m\|$ انجام می گردد.

تذکر:

ضریب w که به نام ضریب بیش رهایی (sur - relaxation) معروف است بر حسب طبیعت مسأله انتخاب می شود،متد بدون سور رلکسیون w = 1 انجام می شود، در حالت پلاستیه w بین 1/7 و 1/6 می باشد.

فرم های متفاوتی می توان استفاده نمود، مانند:

- فرم ماکزیمم:

$$\|m\|=\max_j\left|R_j\right|^i \qquad or \qquad \|n\|=\max_j\left|\Delta u_j\right|^i \tag{5}$$

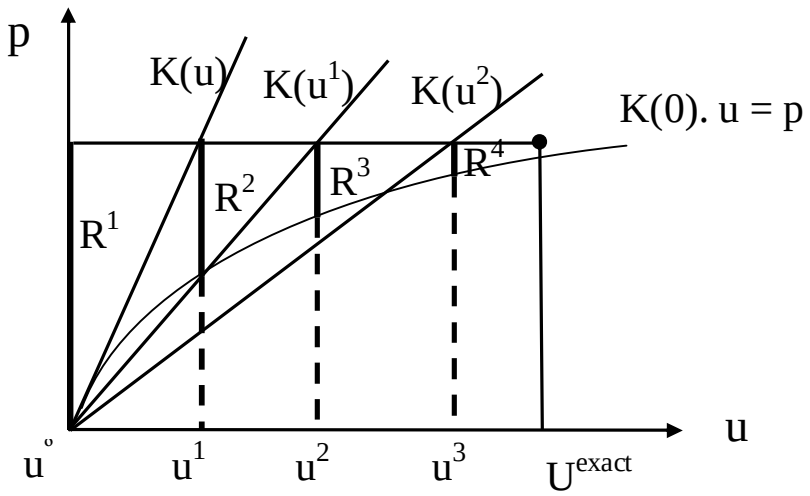
- فرم حداقل مربع:

$$\|m\|=\sqrt{<R^i>\{R^i\}} \qquad or \qquad \|n\|=\sqrt{<\Delta u^i>\{\Delta u^i\}} \tag{6}$$

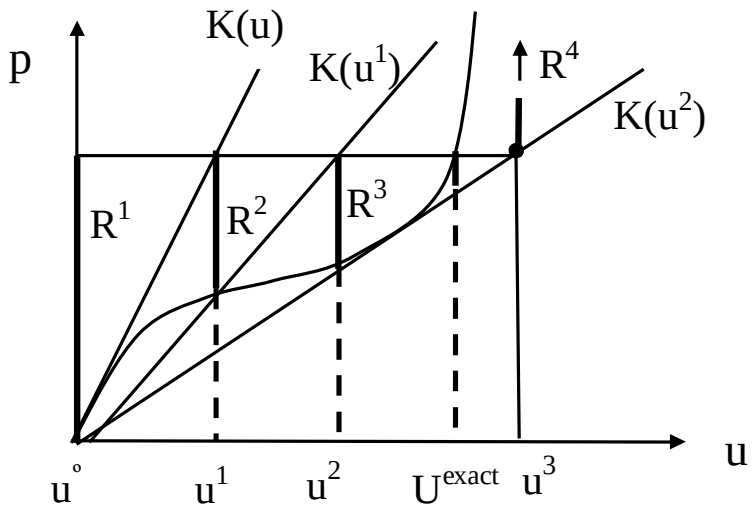
- فرم نسبی:

$$\|n\|=\frac{\sqrt{<\Delta U^i>\{\Delta U^i\}}}{\sqrt{<U^i>\{U^i\}}} \qquad or \qquad \|n\|=\max_j\left|\frac{\Delta U_j}{U_j}\right|^i \tag{7}$$

که به هر تقریب $\|n\| < e$ باید کوچکتر باشد و e عدد مجاز خطای به دست آمده می باشد معمولا 0.05 می باشد.



الگوریتم 4(متد جایگزینی)



معادله اصلی (3) را به صورت زیر فرمول بندی کنیم:

$$([K_e]+[K_{nl}(U^{i-1})])\{\Delta U^i\}=\{R^i\} \qquad (8)$$

که از جداسازی ماتریس کلی به دو ماتریس $[K_l]$ خطی و $[K_{nl}]$ غیر خطی به دست آمده است، می توان با صرف نظر کردن از $[K_{nl}]$ معادله (8) رابطه زیر را نوشت:

$$\begin{aligned}&[K_l]\{\Delta U^i\}=\{R^i\}\\&\{U^i\}=\{U^{i-1}\}+\{\Delta U^i\}\end{aligned} \qquad (9)$$

که در نتیجه K_l را می توان فقط یک بار محاسبه و جمع کرد و در هر تکرار فقط لازم است که $\{\Delta U^i\},\{R^i\}$ از معادلات (9) حساب شوند. الگوریتم معادلات بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

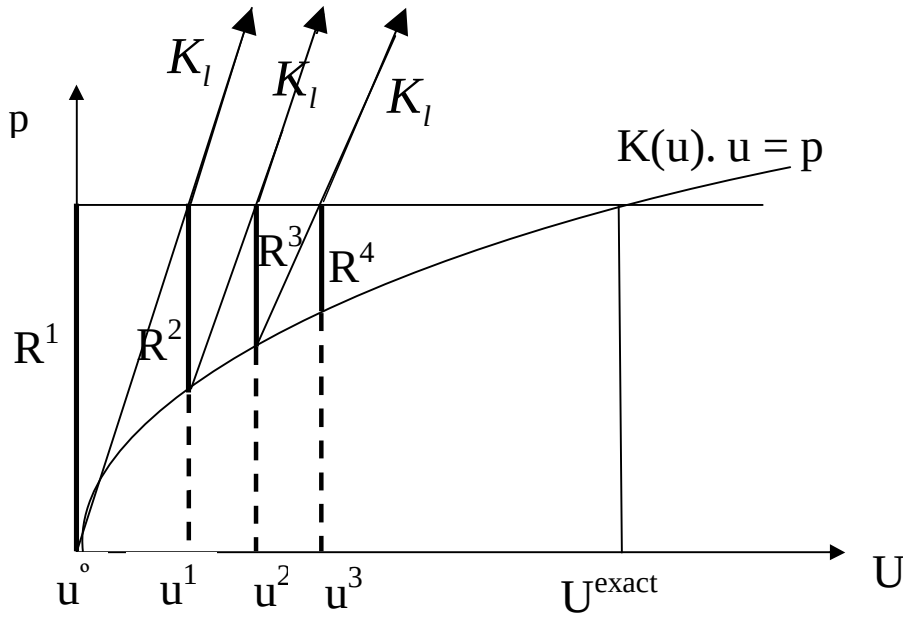
- الگوریتم نیوتن – رافسون اصلاح شده

- جواب تقریبی اولیه $\{U^0\}$ را به دست می آوریم (احتمالا صفر)
- {F} را از جمع {f} بردارهای عنصری به دست می آوریم
- ماتریس K_l را از جمع ماتریس های عنصری خطی $[K_l]$به دست می آوریم

برای هر تکرار .... ,i = 1,2 :

برای هر عنصر:

- مقادیر $\{u^{i-1}\}$ را از بردار $\{U^{i-1}\}$ خارج کرده
- باقیمانده $\{R^i\}$ را از جمع باقیمانده‌های عنصری: $\{r\}=\{f\}-[K]\{U^{i-1}\}$ به دست می‌آوریم
- حل معادله $[K_l]\{\Delta U^i\}=\{R^i\}$
- محاسبه $\{U^i\}=\{U^{i-1}\}+\{\Delta U^i\}$ (با فرض w = 1)
- محاسبه $\|n\|$
- آزمایش همگرایی با استفاده از $\|n\|$



(الگوریتم 10)

نیوتن رافسون اصلاح شده

این متد برای معادلاتی که غیر خطی بودن آنها ضعیف است مناسب می باشد.

متد نیوتن رافسون

اگر فرض کنیم که در تکرار $i-1$ تقریبی از جواب (u^{i-1}) به دست آمده است و با این جواب باقیمانده صفر نباشد.

$$\{R(U^{i-1})\} = \{F\} - [K(U^{i-1})]\{U^{i-1}\} \neq 0 \qquad (11)$$

در تکرار i جواب تقریبی U^i باید رابطه زیر را اقناع کند

$$\{R(U^{i})\} = \{R(U^{i-1} + \Delta U^{i})\} \approx 0 \qquad (12)$$

الگوریتم با بسط سری تیلور باقیمانده در حول u^{i-1} به دست می آید:

$$\{R(U^{i} + \Delta U^{i})\} = \{R(U^{i-1})\} + \left[\frac{\partial R}{\partial O}\right]_{u=U^{i-1}} \{\Delta U^{i}\} + ... = 0 \qquad (13)$$

که اگر از ترم های با درجه بزرگتر از یک صرف نظر کنیم:

$$-\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]\{\Delta U^i\}=\{R(U^{i-1})\}$$

که:

$$[k_t(U^{i-1})]\{\Delta U^i\}=\{R(U^{i-1})\} \qquad (14)$$

$$\{U^i\}=\{U^{i-1}\}+\{\Delta U^i\}$$

عبارت ماتریس مماس $[K_t\{U^{i-1}\}]$ با مشتق گیری از عبارت باقیمانده (1) به دست می آید.

$$[K_t(U)]=-\left[\frac{\partial R}{\partial U}\right]=-\left[\frac{\partial F}{\partial U}\right]+[K(u)]+\left[\frac{\partial[K(u)]}{\partial U}\{U\}\right]$$

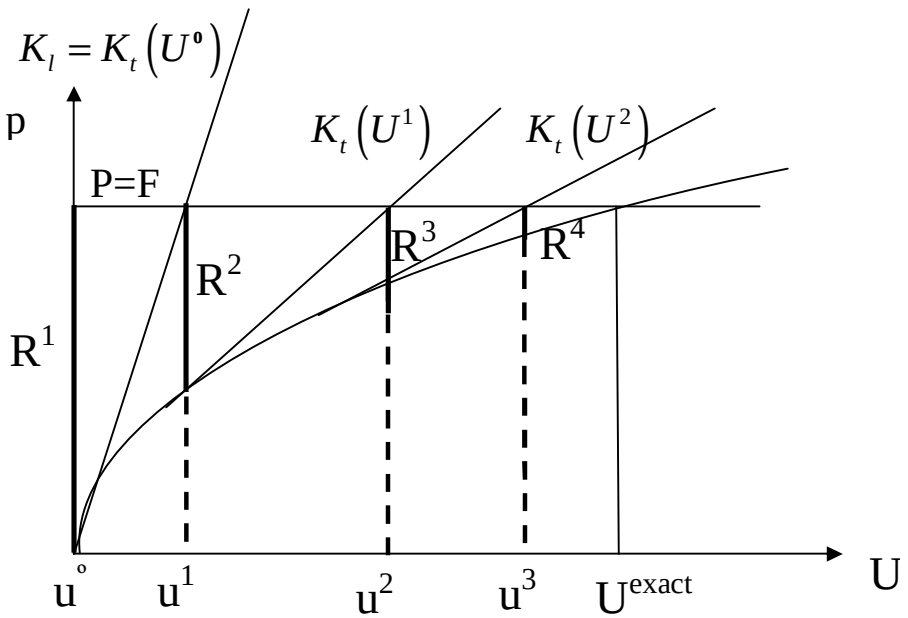
اگر F مستقل از U باشد ترم مشتق آن حذف شده، و اگر $K_{ij},(K_t)_{ij}$ مولفه های ماتریس K,K_t باشند:

$$(K_t)_{ij}=K_{ij}+\sum_l\frac{\partial K_{il}}{\partial U_j}U_l$$

الگوریتم عمل مثل الگوریتم متد جایگزینی است با این تفاوت که $[K_t]$ به جای $[K]$ خواهیم داشت.

تذکر:

معمولا ماتریس $[K_t]$ را از فرم انتگرالی به دست آمده و آن را جمع می کنیم.



متد جزء به جزء

در کلیه متدهای تکرار که در پیش توضیح داده شدند، جواب اولیه که در معادلات معرفی می‌شوند رل مهمی را بازی کرده و ممکن است بر اساس این انتخاب راه حل واگرا گردد.

متد جزء به جزء عبارت است از جایگزینی راه حل.

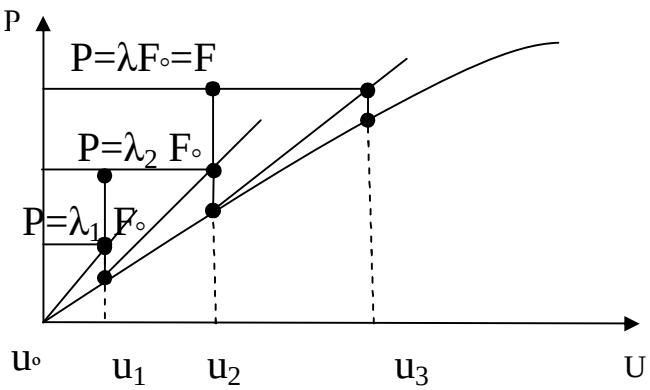
$$[K(U)]\{U\} = l\{F_0\} = \{F\}$$

توسط راه حل مداوم زیر

$$l_j = l_1, l_2, l_3 \quad , \quad [K(U_j)]\{U_j\} = l_j\{F_0\}$$

جواب اولیه در هر بار حل جواب به دست آمده در حل قبلی است. هر گام حل یک مسأله غیر خطی است که اکثرا با متد نیوتن – رافسون یا نیوتن رافسون اصلاح شده خواه با یک تکرار خواه با چند تکرار حل می گردد.

روش جزء به جزء با استفاده از یک تکرار نیوتن – رافسون در هر گام حل به صورت زیر نوشته می شود.



$$\{R(U_{j-1})\} = l_{j-1}\{F_0\} - [K(U_{j-1})]\{U_{j-1}\}$$
$$[K_t(U_{j-1})]\{\Delta U_j\} = \{R(U_{j-1})\} + (l_j - l_{j-1})\{F_0\}$$
$$\{U_j\} = \{U_{j-1}\} + \{\Delta U_j\}$$

متد جزء به جزء با استفاده از نیوتون – رافسون با چند تکرار برای یک سطح تحریکات داده شده l_j به صورت زیر نوشته می شود:

$$[K_t(U_j^{i-1})]\{\Delta U_j^i\} = \{R(U_j^{i-1})\} + (l_j - l_{j-1})\{F_0\}$$
$$\{U_j^i\} = \{U_j^{i-1}\} + \{\Delta U_j^i\} \qquad i = 2,3,....$$

معادلات گذرا

در مسائل انتشاری، مجزاسازی در فضای سه بعدی توسط روش اجزا محدود – معمولا به معادلات درجه اول یا درجه دوم بر حسب زمان منتهی می شود.

معادلات درجه یک فرم زیر را دارند:

$$for\ \ t > t_0 \qquad [C]\{U\} + [K]\{U\} = \{F\}$$
$$\{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

معادلات درجه دوم

$$for\ \ t > t_0 \qquad [M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

$$\{U(t_0)\} = \{U_0\} \ \ , \{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

در معادلات بالا $\ddot{U},\dot{U}$ مشتقات اول و دوم نسبت به زمان می‌باشند. ماتریس‌های $[K],[C],[M]$ به ترتیب ماتریس های جرم، میرایی و سختی هستند که در مسائل حرارتی $[K],[C]$ ماتریس های ظرفیت حرارتی و هدایت حرارتی خواهند شد. بردار $\{F\}$ ، بردار تحریکات (بارگذاری تنشی یا حرارتی) می باشد. ماتریس های بالا می توانند مستقل از بردار مجهول $\{U\}$ باشند که در این صورت سیستم خطی است و همچنین در صورتی که پارامترهای فیزیکی مصالح در طول زمان تغییر نکنند، ماتریس های مذکور در زمان نیز ثابت خواهند بود.

در مواقعی می توان سیستم های درجه دوم را با تغییر متغیر به سیستم های درجه اول تبدیل نمود:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$

با انتخاب

$$\{\dot{U}\} = \{V\}$$
$$[M]\{\dot{V}\} + [C]\{V\} + [K]\{U\} = \{F\}$$
$$[I]\{\dot{U}\} - [I]\{V\} = 0$$
$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ -[I] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$[C']\{\dot{U}'\} + [K']\{U'\} = \{F'\}$$

سیستم بالا تعداد مجهولات افزون گشته و ماتریس K' متقارن نیست.

روش های متداول انتگرال گیری در زمان معادلات درجه اول

- متد اولر واضح (Euler Explicite)

$$\{\dot{U}\} = [C]^{-1}(\{F\} - [K]\{U\})$$

$$for\ \ t > t_0 \qquad \{\dot{U}\} = \{f(\{u\}, t)\} \qquad \{U(t_0)\} = \{U_0\}$$

در صورت انتخاب روش تفاضل محدود پسرو و (به چپ) داریم:

$$\{\dot{U}(t)\} = \{\dot{U}_t\} = \frac{1}{\Delta t}(\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\})$$

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t\{(\dot{U}_t)\}$$
$$= \{U_t\} + \Delta t\{f(\{U_t\}, t)$$

در صورت جایگذاری $\{\dot{U}\}$ از معادله بالا در این معادله خواهیم داشت:

$$[C]\{U_{t+\Delta t}\} = \Delta t\{F_t\} + ([C] - \Delta t[K])\{U_t\}$$

همین معادله به صورت جزیی می تواند نوشته شود:

$$[C]\{\Delta U\} = \Delta t(\{F_t\} - [K]\{U_t\}) = \{R_t\}$$

یا

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \{\Delta U\}$$

الگوریتم عملیات مربوط به حل معادله بالا به صورت زیر است: (جهت پایداری این الگوریتم به مقالات مولف مراجعه شود)

- $t = t_0$
- تعریف $\{U_0\}$ و Δt
- ساختن ماتریس $[c]$
- مثلثی کردن $[c]$
- برای هر گام زمانی
  - $t = t + \Delta t$
  - ساختن $\{R_t\}$
  - حل معادله $\{R_t\} = [C]\{\Delta U\}$
  - محاسبه $\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \{\Delta U\}$

اولر واضح:

$\{\dot{U}(t)\} = \{\dot{U}_t\} = \frac{1}{\Delta t}(\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\})$ تفاضل عدد پسرو (به چپ) می‌دهد.

فرم واضح : $\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \ \{ f(\{U_t\} \ t)$

$$f = [C]^{-1}(\{F\} - [K]\{U\})$$

جایگذاری کرده و بسط دهیم و دو فرم کلی را عرضه کنیم و پایداری را ذکر کنیم. تفاضل محدود و پیشرو (به راست) می دهد.

متد اولر ضمنی:

$$\{\dot{U}_{t+\Delta t}\} = \frac{1}{\Delta t}(\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\})$$
$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t \ \{ f(\{U_{t+\Delta t}\}, \ t + \Delta t)\}$$
$$\Rightarrow \quad [\bar{K}]\{U_{t+\Delta t}\} = \{\bar{R}_{t+\Delta t}\}$$
$$[\bar{K}] = [C] + \Delta t[X]$$
$$\{\bar{R}_{t+\Delta t}\} = \Delta t\{F_{t+\Delta t}\} + [C]\{U_t\}$$

و با فرم Δ U

$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{\bar{R}_{t+\Delta t}\} - [\bar{K}]\{U_t\}$$
$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{R_{t+\Delta t}\}$$
$$\{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t(\{F_{t+\Delta t}\}[K]\{U_t\})$$

متد نیمه ضمنی:

$$\{U_{t+\Delta t}\} = \{U_t\} + \Delta t\{ \ f(\{U_{t+a\Delta t}\}, t + a\Delta t) \ \}$$
$$\{U_{t+\Delta t}\} = a\{U_{t+\Delta t}\} + (1-a)\{U_t\}$$

$$a = 1 \quad inplicit$$
$$a = 0 \quad \exp licit$$
$$[\bar{K}]\{U_{t+\Delta t}\} = \{\bar{R}_{t+\Delta t}\}$$
$$[\bar{K}] = [c] + a\Delta t[K]$$
$$\{\bar{R}_{t+\Delta t}\} = \Delta t(a\{F_{t+\Delta t}\} + (1-a)\{F_t\} - (1-a)[K]\{U_t\}) + [C]\{U_t\}$$

فرم Δ U:

$$[\bar{K}]\{\Delta U\} = \{R_{t+\Delta t}\} \ , \ \{R_{t+\Delta t}\} = \Delta t(a\{F_{t+\Delta t}\} + (1-a)\{F_t\} - [K]\{U_t\})$$

معادلات درجه یک

معادلات گذرا

$$for \quad t > t_0 \qquad [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$
$$\{U_{(t_0)}\} = \{U_0\}$$

درجه دوم

$$for \quad t > t_0 \qquad [M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\}$$
$$\{U_{(t_0)}\} = \{U_0\}, \{\dot{U}_{(t_0)}\} = \{\dot{U}_0\}$$

تبدیل به درجه یک

$$\{\dot{U}\} = \{V\}$$
$$[M]\{\dot{V}\} + [C]\{V\} + [K]\{U\} = \{F\}$$
$$[I]\{\dot{U}\} - [I]\{V\} = 0$$
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & K \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

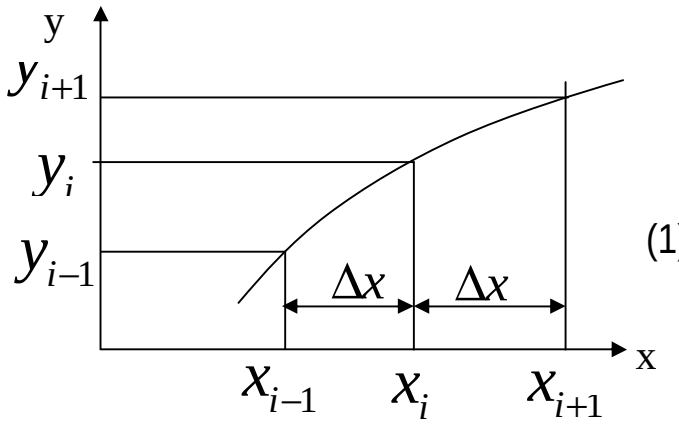
$$[c']\{\dot{U}'\} + [k']\{U'\} = \{F'\}$$

روش تفاضل محدود:

با نوشتن تابعی مثل $y = f(x)$ می توانیم مشتقات درجه اول و درجه دوم و ..... آن را در نقطه x_i به طریق زیر محاسبه کنیم.

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} \qquad (1)$$

فرمول بالا به فرمول تفاوت مرکزی معروف است می توان از فرمول های تفاوت پیشرو و تفاوت پسرو به شرح زیر نیز به عنوان فرمول های دیگری که مشتق درجه اول در نقطه x_i را به دست می دهند یاد کرد.



شکل (1)

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad (2)$$ تفاوت پیشرو

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \qquad (3)$$ تفاوت پسرو

فرمول تفاوت مرکزی نسبت به دو فرمول دیگر از تقریب بهتری جهت تعیین میزان مشتق درجه اول در نقطه مفروض برخوردار است. مشتقات از درجات دیگر را نیز به همین روش می‌توان محاسبه نمود. مثلا جهت مشتق درجه دوم را با استفاده از عبارت مشتق درجه اول در نقاط به فاصله $\frac{\Delta x}{2}$ در هر طرف x_i $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ و با توجه به این که مشتق درجه دوم بیانگر نرخ تغییرات مشتق درجه اول بین این دو نقطه می باشد محاسبه نمود.

$$y_i'' = \frac{y'_{i+\frac{1}{2}} - y'_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \qquad (4)$$

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad (5)$$

$$y'_{i-\frac{1}{2}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \qquad (6)$$

با گذاشتن فرمول‌های (5) و (6) در فرمول (4) نتیجه می گیریم:

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \qquad (7)$$

به همین طریق با استفاده از سری‌های تیلور و مک لوران می‌توان مشتقات درجه بالاتر را به دست آورد.
و هنگامی که با توابع دو پارامتر مستقل مثل $j = f(x,y)$ کار می کنیم، لازم است که از شبکه بندی در دو جهت x,y با اندازه های $\Delta x, \Delta y$ استفاده کنیم. برای چنین توابعی مشتقات درجه اول و درجه دوم را از فرمول تقریب تقارن مرکزی به شرح زیر به دست می آوریم:

$$(\frac{\partial j}{\partial x})_{i,j} = \frac{j_{i+1,j} - j_{i-1,j}}{2\Delta x} \qquad (8)$$

$$(\frac{\partial j}{\partial y})_{i,j} = \frac{j_{i,j+1} - j_{i,j-1}}{2\Delta y} \qquad (9)$$

$$(\frac{\partial^2 j}{\partial x^2})_{i,j} = \frac{j_{i+1,j} - 2j_{i,j} + j_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \qquad (10)$$

$$(\frac{\partial^2 j}{\partial y^2})_{i,j} = \frac{j_{i,j+1} - 2j_{i,j} + j_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \qquad (11)$$

اگر فرم کلی معادله دیفرانسیل، مشتقات جزیی از درجه دوم زیر را در نظر بگیریم:

$$a\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 j}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 j}{\partial y^2} = f(x, y, j, \frac{\partial j}{\partial x}, \frac{\partial j}{\partial y}) \qquad (12)$$

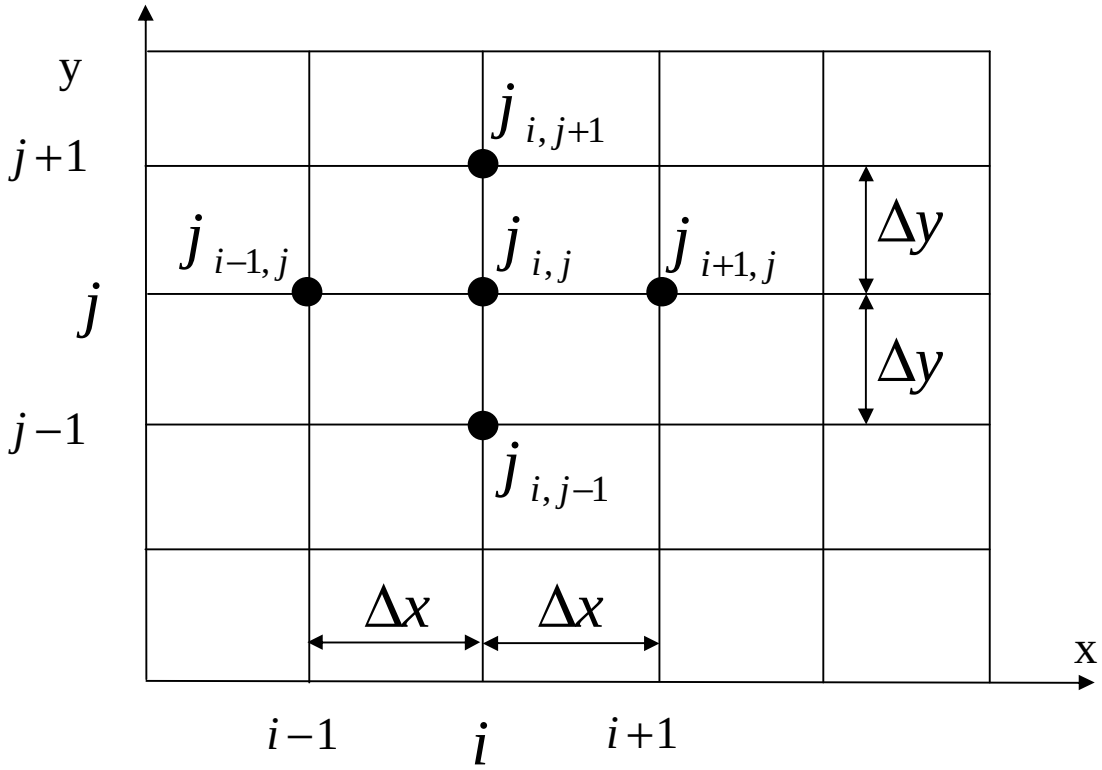
برحسب مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$، معادله بالا نام های زیر را به خود می گیرد و راه حل هر یک از معادلات زیر به طور مشخص در کتاب های تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل مشتقات جزیی داده شده است.

(elliptic) معادله بیضی $\Delta < 0$

(Parabolic) سهمی $\Delta = 0$

(hyporbolic) هذلولی $\Delta > 0$

لیکن بحث ما در مورد فرم ساده شده معادله بالا یعنی $\nabla^2 h = 0$ می باشد.



شکل (2)

برای حل معادله بالا عبارات مشتق جزیی درجه دوم را که به دست آورده‌ایم در عبارات لاپلاسین جایگزین می کنیم.

$$\frac{h_{i,j+1}-2h_{i,j}+h_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}+\frac{h_{i+1,j}-2h_{i,j}+h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}=0 \qquad (13)$$

با مساوی قرار دادن $\Delta x=\Delta y$ یعنی با استفاده از یک شبکه مربعی می‌توان نوشت:

$$h_{i,j+1}+h_{i,j-1}-4h_{i,j}+h_{i+1,j}+h_{i-1,j}=0 \qquad (14)$$

یعنی عامل ∇^2 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & -4 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (15)$$

در حل یک مسأله تراوش آب یا انتشار حرارت یا هدایت الکتریکی که معادله حاکم بر آن به صورت معادله درجه دوم (لاپلاسین) می باشد، برای هر یک از نقاط شبکه معادله بالا را نوشته و یک سیستم معادلات چند مجهولی را باید در انتها حل نمود.

روش های حل معادلات جبری چند مجهوله به شرح زیر است:

1- روش های مستقیم مثل گوس – جردن، چولسکی، دولیتل

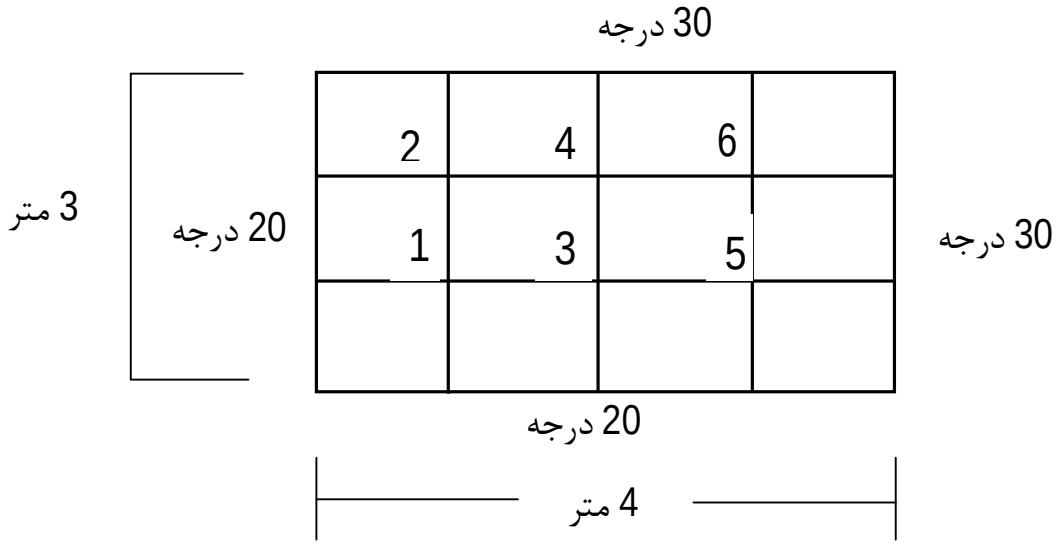
2- روش تکرار

3- روش رهایی

توضیح روش‌های مستقیم را که معمولا در حل معادلات بزرگ (مجهول‌های بسیار زیاد) به کار گرفته می شود. در کتاب های محاسبات علمی می توان یافت و معمولا با نوشتن یک برنامه کوتاه کامپیوتری جهت عکس نمودن ماتریس ضرایب که قبلا بصورت مثلثی درآمده اند همراه است.

روش های غیرمستقیم (روش تکرار یا رهایی) معمولا در حل معادلات دستی استفاده شده و روش تکرار از تقارب بهتری برخوردار می باشد. به همین دلیل با حل یک مثال روش مستقیم و روش تکرار را توضیح می دهیم.

مثال مطلوب است: تعیین درجه حرارت نقاط محیط زیر با فرض شرایط حدی داده شده.



معادله حاکم $\Delta T = 0$ می‌باشد. عامل لاپلاسین داده شده در معادله (15) را استفاده می کنیم.

1) روش مستقیم: معادلات با استفاده از معادله (14) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$-4T_1 + T_2 + T_3 = -40$$
$$T_1 - 4T_2 + T_4 = -50$$
$$T_1 - 4T_3 + T_4 + T_5 = -20$$
$$T_2 + T_3 - 4T_4 + T_6 = -30$$
$$T_3 - 4T_5 + T_6 = -50$$
$$T_4 + T_5 - 4T_6 = -60$$

از حل، سیستم شش معادله و شش مجهول داده شده، می‌توان درجه حرارت نقاط 1 تا 6 را به دست آورد.

2.روش تکرار

با استفاده از عامل لاپلاسین زیر :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با فرض اینکه درجه حرارت در تمام نقاط محیط یکسان باشد عمل تکرار را شروع می کنیم.

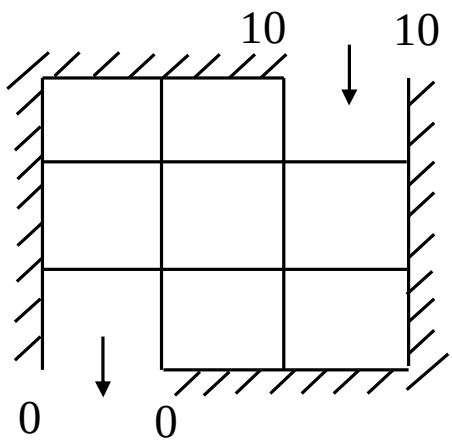
از سمت چپ و بالا شروع کرده و به صورت ستونی پیش خواهیم رفت. زمانی که اختلاف بین دو تکرار به حد کافی کوچک شده باشد می توان حل مسأله را متوقف نموده و جواب های آخرین تکرار را با تقریب

30	30	30	30	30	
	23/4 22/5 20	25 23/1 20	27/3 25/8 20		20
	21/1 20/6 20	22/6 20/9 20	25 24/2 20		20
					30
20	20	20	20		

مناسبی به عنوان جواب های مسأله قبول کرد.

مسأله: در میدان جریان دو بعدی زیر، بار آبی نقاط را به دست آورید.

سطوح هاشور خورده نمودار سطوحی هستند که نفوذناپذیر می باشند. بار آبی در دو نقطه در بالا مساوی 10 و در دو نقطه در هنگام خروج مساوی صفر می باشد.



بر روی بستر ارتجاعی با روش تفاضل محدود

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -K_s.y$$

$$y'' = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+2} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(\Delta x)^3}$$

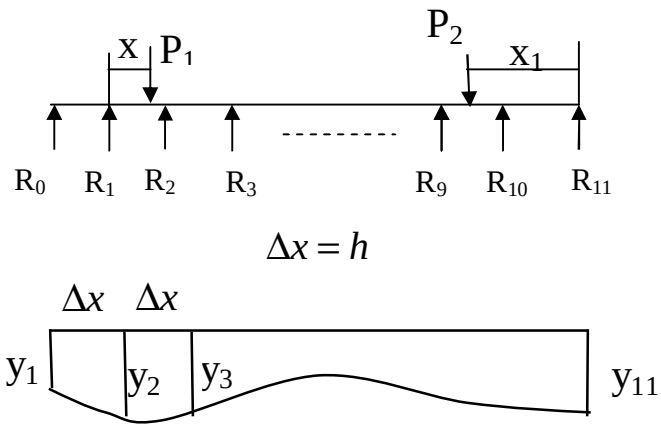
$$M = EIy''$$

$$V = EIy'''$$

$$M_i = \frac{EI}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = M_i$$

$$V_i = \frac{EI}{h^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) = V_i$$

$$q_i = K_s B y_i$$



هر نوع پخش تنشی را می توانیم انتخاب کنیم.

$$R_1 = y_2 K_s B h y_1$$

$$R_2 \quad to \quad R_{10} = K_s B h y_i$$

$$R_{11} = y_2 K_s B h y_{11}$$

برای هر نقطه معادله M را می نویسیم: مثلا برای نقطه 2 داریم:

$$M_2 = \frac{EI}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) = R_1 h - P_1(h-x) = \frac{1}{2}K_s B h\, y_1 - P_1(h-x)$$

برای نقطه 3 داریم:

$$\frac{EI}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) = R_1(2h) + R_2 h - P_1(2h-x)$$

در نتیجه برای 9 نقطه میانی، 9 معادله خواهیم داشت:

مجموع ممان ها و مجموع نیروها را که بنویسیم معادلات کامل می شوند.

$$\sum M_{0_{11}} = \mathbf{0} \qquad R_1(10h) + R_2(9h) + \dots\dots\dots R_{10}h - P_1(10h-x) - P_2(x_1) = 0$$

$$\sum F_y = \mathbf{0} \qquad \sum_1^{11} R_i - P_1 - P_2 = 0$$

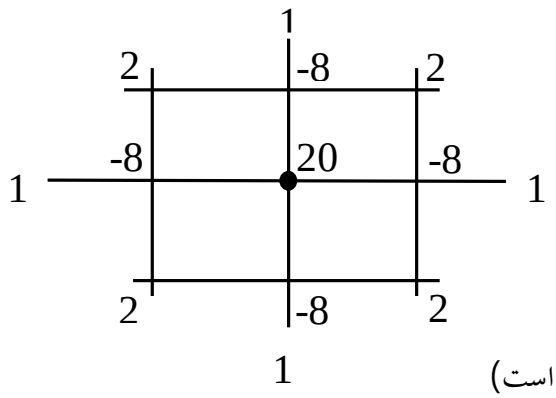
معادله تغییر مکان دال ها $D\nabla_w^4 = q - KW$ یا $D = Eh^3 / 12(1-u^2)$ منحنی پی گسترده

$$\nabla_w^4 = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial^4 y} \qquad \Delta x = \Delta y = h$$

بار گسترده زیر پی : q

مدول سابگرید خاک : k

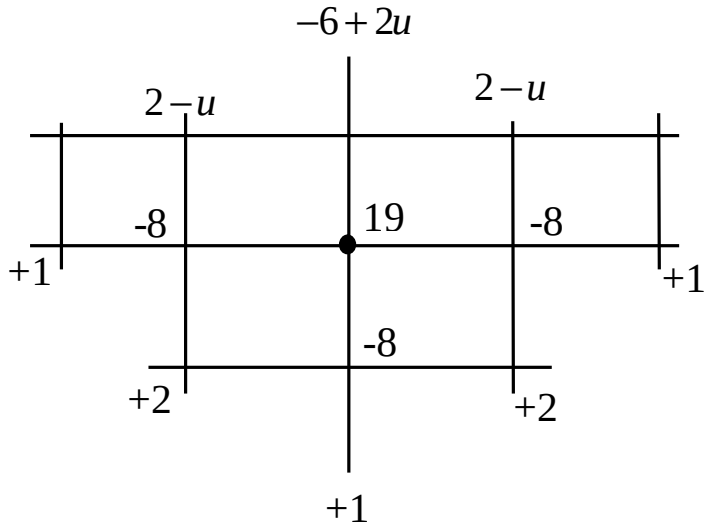
اپراتور معادله را می نویسیم:



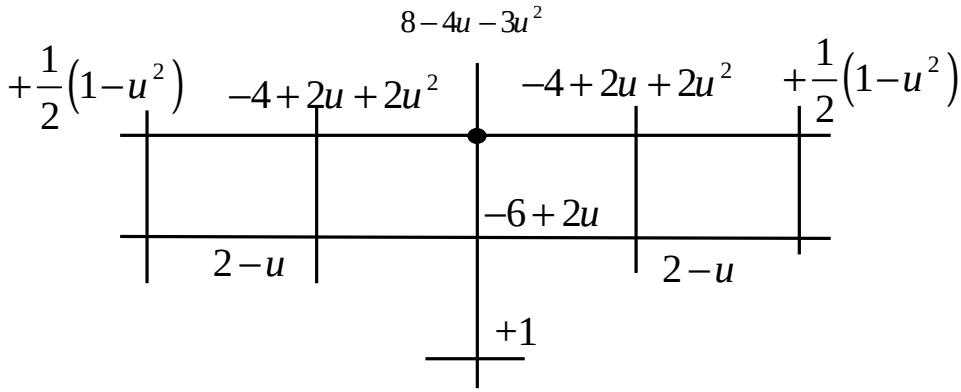
$$= \frac{q\Delta x^4}{D} + \frac{Qh^2}{D}$$

$$= \frac{qh^4}{D} + \frac{Qh^2}{D}$$

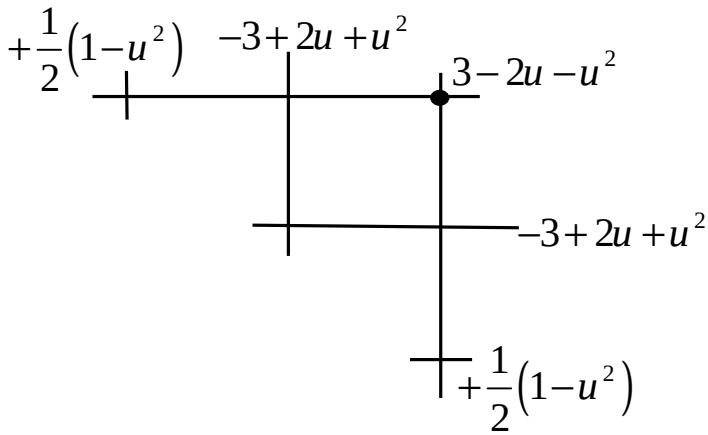
Q : بار در نقطه مرکز (نقطه مورد نظر است)



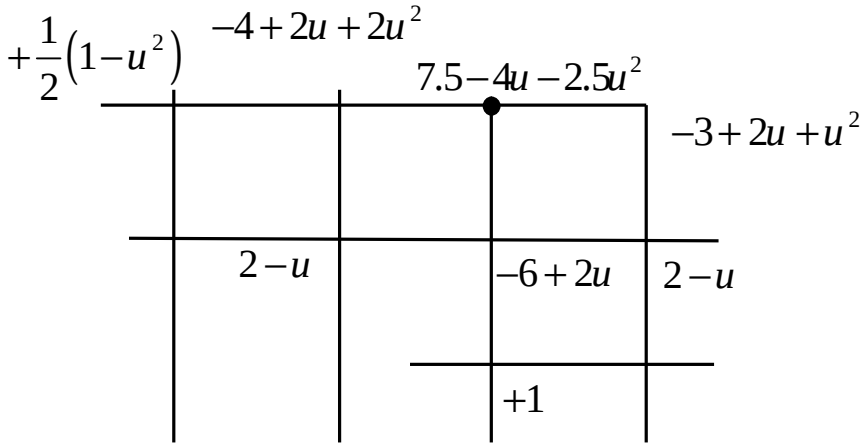
$$=\frac{qh^4}{D}+\frac{Qh^2}{D}$$



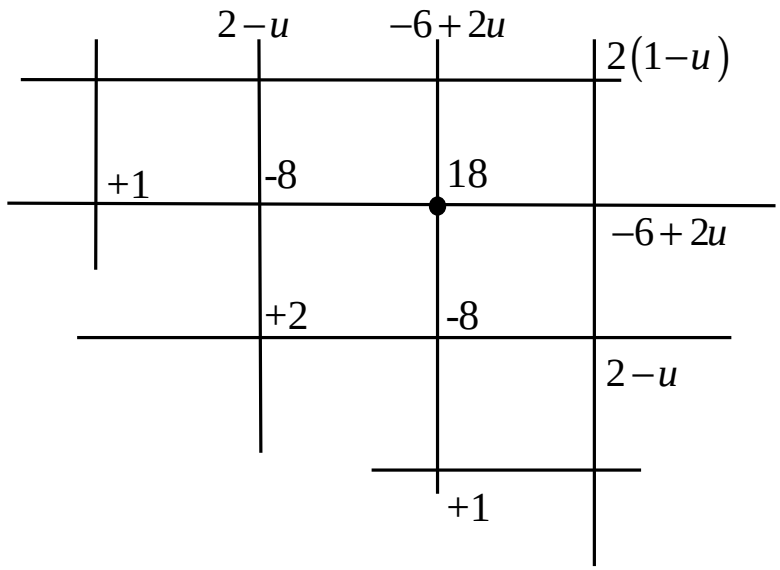
$$=\frac{qh^4}{2D}+\frac{Qh^2}{D}$$



$$=\frac{qh^4}{4D}+\frac{Qh^2}{D}$$



$$=\frac{qh^4}{2D}+\frac{Qh^2}{D}$$



$$=\frac{qh^4}{D}+\frac{Qh^2}{D}$$

برای المان‌ها می‌توان نوشت و اپراتور را پیدا کرد.

ممان در جهت x $M_x = M'_x + uM'y$

$$M_{horizontal} = -\frac{D}{h^2}(w_{left} - 2w_a + w_{right}) + D(w_{up} - 2w_a + w_{down})$$

محیط متخلخل زیر بارهای دینامیکی و گذرا

کشش مثبت انتخاب شده است

جرم مخصوص مجموعه r متغیرها s_{ij}

جرم مخصوص مایع r_f P

جرم مخصوص جامد r_s تغییر مکان متوسط solid u_i

مجموعه مایع تغییرمکان یافته بر کل سطح است $w_i \rightarrow w_i / n$ تغییر نسبی مایع نسبت به solid

فرض

$$e_{i,j} = \frac{(U_{i,j} + U_{j,i})}{2}$$

در مختصات لاگرانژ

$$U_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

تنش موثر و روابط رفتاری

تعریف تنش موثر

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$

تغییر شکل حجمی حاصل از تغییرفشار حفره ای عبارت است از

$$d\bar{e}_{ij} = -d_{ij} \; dP/(3K_s)$$

مدول تغییر شکل حجمی دانه های اسکلت (اگر رفتار غیر خطی باشد K_s تابع P خواهد بود)

درخاک قابل صرف نظرکردن است ولی درسنگ باید در نظر گرفته شود.

$$de_{ij} = de^{s}_{ij} + d\bar{e}_{ij} + de^{o}_{ij}$$

O خزش ،دما

تغییر شکل های حاصل از تنش de^{s}_{ij} *از رابطه تنش – تغییرشکل بدست می آید.*

$$ds'_{ij} = D_{ijkl} de^{2}_{kl}$$

معادله حرکت تعادل کل solid

$$s_{ij,k} r g_i = r \ddot{u}_i + r_f w_i$$

توجه کنید که باید $n r_f$ گذاشته شود ولی بعلت اینکه از تغییر مکان متوسط استفاده میکنیم (average

$n r_f \ddot{w}_i / n$ (چون معادله حرکت کلی است درنتیجه $n\rho_f$ استفاده میشود

معادله تعادل جریان مایع

$$\dot{w}_j = -K_{ij} P_{,i}$$

درحالت همان $K_{ij} = d_{ij} k$ و درحالت غیرهمسان ماتریس قطری است.

معادله تعادل کلی مایع

$$-P_{,i} + r_f g_i = K^{-1}_{ij} \dot{w}_j + r_f \ddot{u} + r_f \ddot{w}_i / n$$

اصل بقای جرم مایع

آخرین معادله لازم معادله بقای جرم مایع است.

دیورژانس سرعت مایع= نسبت افزایش حجم مایع +نسبت کاهش حجم حفرات

$$\dot{w}_{i,i} = -\dot{d}_{ii} - (1-n)\, P'/K_s + \dot{s}'_{ij}/3K_s - \dot{P} n/K_f$$

K_f مدول حجمی مایع

ترم 1 دست راست = نسبت کاهش اسکلت در حالت غیر قابل تراکم بودن دانه ها (rate)

ترم2 دست راست = ترم مربوط به نسبت افزایش حجم حفرات بدلیل کاهش حجم دانه ها تحت تاثیر افزایش فشار هیدرواستاتیک

ترم3 دست راست = ترم مربوط به نسبت افزایش حجم حفرات بدلیل کاهش حجم دانه ها تحت تاثیرافزایش تنش متوسط

ترم 4 دست راست نسبت افزایش حجم مایع

P چون فشار است منفی است لذا دو ترم حاوی P علامت منفی داریم

در نتیجه معادلات بصورت زیر خلاصه میشوند :دراین معادلات اندرکنش خاک و سازه بطور دینامیکی درنظر گرفتهن شده است.

تغییر مکان کوچک

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

رابطه رفتاری

$$ds'_{ij} = D_{ijkl}\left(de_{kl} - d\varepsilon_{kl} + d_{kl}\frac{dp}{3K_s}\right)$$

$$s_{ij,j} + r g_i = r \ddot{u}_i + r_f \ddot{w}_i$$ تعادل

تعادل مایع بعلاوه معادله رفتاری مایع

$$-P_{,i} + r_f g_i = K^{-1}_{ij}\dot{w}_j + r_f \ddot{u}_i + r_f \ddot{w}_i / n$$

بالانس جرم

$$w_{i,i} + e_{ii} + nP/K_f + (1-n)P/K_s - s'_{ii}/3K_s = F(x_i)$$ انتگرال گرفته شده از بالا

F تابع شرایط اولیه است لذا میتوان فعلا صفر گرفت

ترم های دارای Ks بدلیل بزرگی Ks میتوانند حذف شوند لیکن در مکانیک سنگ چون اندازه بزرگی ks با اندازه های ماتریس K یکی است نمیتوان حذف کرد.

فرمهای ساده شده :

فرمول بندی U-P (پدیده های سرعت نسبی متوسط)

بجای شش درجه آزادی سه بعدی یا 4 درجه آزادی دو بعدی با W و u بهتر است از U و P که سه درجه آزادی دو بعدی هستند استفاده کنیم

اگر فرض کنیم $\frac{\ddot{w}_i}{\ddot{u}_i} \to 0$ خواهیم داشت

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

$$ds'_{ii} = D_{ijkl}(de_{kl} - d\dot{e}_{kl} + d_{kl}\frac{dp}{3K_s})$$

$$s_{ij,j} + r g_i = r \ddot{u}_i$$

$$(K_{ij}P_{,i})_{,i} - \dot{e}_{ii} - (K_{ij} r_f g_i)_{,i} = -(K_{ij} r \ddot{u}_j)_{,i} + n\dot{P}/K_f + (1-n)\dot{P}/K_s - \dot{s}'_{ii}/3K_s$$

معادله بالا از گذاشتن $\dot{w}_i = -K_{ij}P_{,i} - K_{ij} r \ddot{u}_i + K_{ij} r_f g_i$ در معادله آخر معادلات اصلی بدست آمده است.

خود این معادله از معادله تعادل جریان مایع بدست آمده است

معادلات تحکیم : پدیده بسیار کند

$$\ddot{u}_i \to 0 \quad \dot{w}_i \to 0$$

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$

$$de_{ij} = \frac{(du_{ij} + du_{ji})}{2}$$

$$ds'_{ii} = D_{ijkl}(de_{kl} - d\dot{e}_{kl} + d_{kl}\frac{dp}{3K_s})$$

$$s_{ij,j} + r g_i = 0$$

$$(K_{ij}P_{,i})_{,i} - \dot{e}_{ii} - (K_{ij} r_f g_i)_{,i} = n\dot{P}/K_f + (1-n)\dot{P}/K_s - \dot{s}'_{ii}/3K_s$$

معادلات بسیار سریع:رفتار غیر زهکشی شده

درمواقعی که kij بسیار کوچک است wi و w□I و w□i هیچگاه به مقادیر قابل توجهی نمیرسند

با Kij=0 معادله آخر می دهد:

$$\dot{e}_{ii} = -\dot{P}/K_f - (1-n)\dot{P}/K_s - \dot{s}_{ii}/3K_s$$

یا بصورت جزئی

$$de_{ii} = -dP(n/K_f + (1-n)/K_s) + ds_{ii}/3K_s$$

درنهایت سیستم بصورت زیر در می آید

$$s_{ij} = s'_{ij} - d_{ij} P$$

$$de_{ij}=\frac{(du_{ij}+du_{ji})}{2}$$

$$ds'_{ij}=D_{ijkl}(de_{kl}-d\dot{\alpha}_{kl}+d_{kl}\frac{dp}{3K_s})$$

$$dP(n/K_f+(1-n)/K_s)^{-1}(-de_{ii}+ds'_{ii}/3K_s)$$

$$s_{ij,j}+r g_i=r\ddot{u}_i$$

با ks بزرگ در خاکها می توان نوشت :

$$ds_{ij}=\bar{D}_{ijkl}(de_{kl}-d\dot{\alpha}_{kl})$$

$$de_{ij}=\frac{(du_{ij}+du_{ji})}{2}$$

$$s_{ij,j}+r g_i=r\ddot{u}_i$$

$$\bar{D}_{ijkl}=D_{ijkl}+d_{ij}d_{kl}K_f/n$$

میبینیم که محیط یک فازی مشود که اتریس سختی آن فرق کرده است

-رفتار زهکشی شده:

درحالتی که زهکشی انجام می شود می توان نوشت

$$\dot{w}_i=0 \qquad \ddot{w}_i=0$$

$$\dot{u}_i=0 \qquad \ddot{u}_i=0$$

مسلم است که معادلات از یکدیگر جدا شده و اندرکنش موجود نخواهد بود

درحالت دینامیکی مورد زهکشی شده هیچگاه اتفاق نمی افتد

$$-(K_{ij}P_{,j})+(K_{ij}r_f g_i)_{,i}=0$$

با استفاده از این معادله P بدست می آید.سپس با استفاده از معادلات زیر میتوان تغییر مکان شکل را بدست آورد.

$$s_{ij,j}-P_{,i}+r g_i=0$$

$$ds'_{ij}=D_{ijkl}(de_{kl}-d\dot{\alpha}_{kl})$$

$$de_{ij}=\frac{(du_{ij}+du_{ji})}{2}$$

اعتبار هریک از تقریبات

با فرض بزرگ بودن ks پارامترهای زیر را تعریف میکنیم

$$\Pi_1=\frac{K r V_c^2}{w l^2}=\frac{2 K r T}{p T^2}=\frac{2}{bp}\frac{\bar{K}}{g}\frac{T}{T^2}$$

$$\Pi_2=\frac{w^2 l^2}{V_c^2}=p^2(\frac{\hat{T}}{T})^2$$

$$\Pi_3=b=\frac{r_f}{r}$$

$$\Pi_4=n$$

$$\Pi_5=\frac{K_f}{n(K+K_f/n)}$$

پریود طبیعی خاک

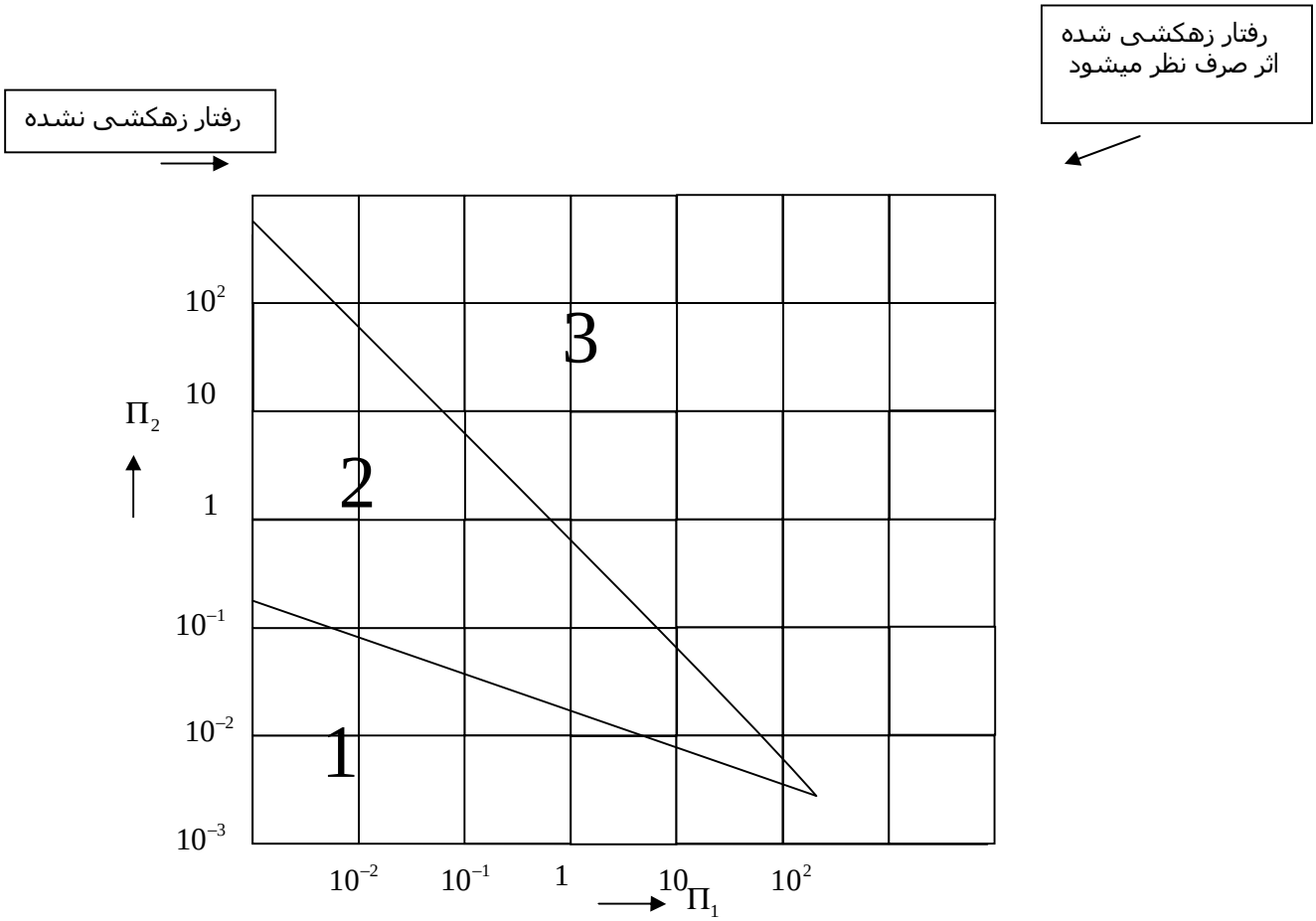
$$T=\frac{2L}{V_c}$$

$$V_c^2=\frac{K+K_f/n}{r}=\frac{b K_f}{r_f n}=\frac{K_f}{r_f}$$

$$K=E(1-n)(1+n)(1-2n)$$

در حالت خاک $\Pi_3=\Pi_4=1/3$ و $\Pi_5=1$ می توان درنظر گرفت ودرنتیجه Π_1, Π_2 پارامترهـای موثر هستند وقتیکه Π_2 بسیار کوچک است .

کلا اثر دینامیکی میتواند حذف شود و راه حل های مختلف نتایج یکسان میدهند.



1) B=Z=C
2)B=Z≠C
3)B≠Z≠C

برای یک زلزله $T=0.01\text{-}10^{s}$ که بر یک سد به طول 50 متر وارد می شود $T=0.15$ است

Vc=1000m/s

$$\left(\frac{2K\times10^{-2}}{10\times(10^{-1})^2}\right)=0.2k<\Pi_1<\frac{2K}{10}\times\frac{10}{10^{-2}}=200k$$

$$\left(\frac{10\times10^{-1}}{10}\right)=10^{-3}<\Pi_1<10\left(\frac{10^{-1}}{10^{-2}}\right)^2=10^3$$

برای یک مساله شماتیک دریایی $T=10\ s$ با عمق 10 متر زیر بستر دریا

$$T=10^{-2}s \qquad \Pi_2<10\left(\frac{10^{-2}}{10}\right)^2=10^{-5}$$

درنتیجه اثرات دینامیکی کلا میتواند حذف گردد.